

# Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2016

## ESPACIOS DE HILBERT

En la cancha se ven los pingos.

1. Probar que son espacios de Hilbert:

(a)  $\mathbb{C}^n$ , con el producto escalar  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$

(b)  $\ell^2$ , con el producto escalar  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

(c)  $L^2(X)$ , donde  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida, con producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

2. Si  $H$  es un espacio vectorial y  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización,  $\forall x, y \in H$ :

$$a(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) + i \left[ a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy) \right] \right\}$$

En particular, en  $H$  Hilbert,  $\forall x, y \in H$ :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \left( \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right) \right\}$$

3.  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ , si  $p \neq 2$  y  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$  no son espacios de Hilbert.

4. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $\{e_n\}_n$  un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

(a)  $\{e_n\}_n$  es ortonormal maximal.

(b) Si  $x \in H$ ,  $x \perp e_n \forall n$ , entonces  $x = 0$ .

5. *Ortogonalización de Gram-Schmidt*: Sea  $H$  un espacio de Hilbert y supongamos que  $\{b_n\}_n$  es un subconjunto linealmente independiente de  $H$  que genera un subespacio denso en  $H$ .

(a) Definamos  $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$  y, una vez definido  $e_n$ ,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\|b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k\|}$$

Probar que  $\{e_n\}_n$  es una base de  $H$ .

(b) Si  $\{f_n\}_n$  es un conjunto ortonormal tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ,

con  $\lambda_n \neq 0$ , tales que  $f_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$  entonces  $f_n = \alpha_n e_n$ , con  $\alpha_n \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_n| = 1 \forall n$ .

6. *Desigualdad de Bessel*: Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$  un conjunto ortonormal. Probar que

$$\forall x \in H \text{ y para cada } N \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

$$\forall x \in H, \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

7. Sea  $H$  un espacio de Hilbert, si  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una base de  $H$  entonces  $\forall x \in H$  vale:

(a)  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

(b)  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

(c) Si  $y \in H$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$

8. (a) Probar que  $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$  dado por  $(e^n)_k = \delta_k^n$  es una base de  $\ell^2$ .

(b) Probar que  $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base de  $L^2[-\pi, \pi]$ .

(c) Probar que  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$  es una base de  $L^2[-1, 1]$  considerado como  $\mathbb{R}$  espacio vectorial.

9. Sean  $H$  y  $K$  espacios de Hilbert. En  $H \times K$  definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que  $(H \times K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert, y que  $H \times \{0\}$  y  $\{0\} \times K$  son cerrados y ortogonales en  $H \times K$ .

10. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $S \subset H$  un subespacio cerrado propio.

(a) Probar que existe  $x \in H - S$  tal que  $x \perp S$ .

(b) Si  $S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$  entonces  $S^\perp$  es un subespacio cerrado y  $S \oplus S^\perp = H$ .

(c)  $(S^\perp)^\perp = S$

(d) Dar contraejemplos de (b) y (c) si  $S$  no es cerrado.

11. (a) Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $D \subset H$  un subconjunto. El subespacio generado por  $D$  es denso en  $H$  si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

(b) En  $\ell^2$  sea  $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$ . Probar que  $S$  es denso en  $\ell^2$ .

12. Sean  $S$  y  $T$  subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert  $H$ . Probar que  $S \oplus T$  es cerrado.

13. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $x_n, x \in H$ .

(a)  $x_n \xrightarrow{w} x$  si y sólo si  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$

(b) Si  $\{e_n\}_n$  es una base de  $H$  entonces  $e_n \xrightarrow{w} 0$

(c) Si  $x_n \xrightarrow{w} x$  y  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  entonces  $x_n \rightarrow x$

(d) Si  $\{e_n\}_n$  es una base de  $H$  entonces  $x_n \xrightarrow{w} x$  si y sólo si  $(x_n)_n$  está acotada y  $\langle x_n, e_m \rangle \rightarrow \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(e) Si  $x_n \xrightarrow{w} x$ , entonces existe una subsucesión  $x_{n_k}$  tal que su media aritmética  $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \dots + x_{n_k})$  verifica que  $z_k \rightarrow x$ .

14. Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert  $H$ , son equivalentes:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge.

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge débilmente.

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$  converge.

15. Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert  $H$  y  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión ortogonal en  $H$  que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es también completo.

**Familias Sumables:**

Definición: Sean  $E$  un espacio de Banach,  $(x_i)_{i \in I}$  una familia en  $E$ . Decimos que  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subseteq I$ ,  $F$  finito, tal que si  $G_1$  y  $G_2$  son subconjuntos finitos de  $I$  que contienen a  $F$  entonces

$$\left\| \sum_{i \in G_1} x_i - \sum_{i \in G_2} x_i \right\| < \varepsilon$$

16. Probar que  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$ ,  $F$  finito, tal que si  $F \subset G \subset I$ ,  $G$  finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in G - F} x_i \right\| < \varepsilon$$

Definición: La familia  $(x_i)_{i \in I}$  es sumable y su suma es  $x \in E$  si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset I$ ,  $F$  finito, tal que si  $F \subset G \subset I$ ,  $G$  finito, entonces

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

17. En un espacio de Banach  $E$ ,  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy si y sólo si  $(x_i)_{i \in I}$  es sumable.

18. Si  $x = \sum_{i \in I} x_i$ ,  $y = \sum_{i \in I} y_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces

$$x + y = \sum_{i \in I} (x_i + y_i) \quad \wedge \quad \lambda x = \sum_{i \in I} (\lambda x_i)$$

19. Si  $x = \sum_{i \in I} x_i$ ,  $y \in H$ , con  $H$  Hilbert, entonces

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y \rangle.$$

20. Si  $\sum_{i \in I} x_i$  es de Cauchy, entonces  $\{i \in I : x_i \neq 0\}$  es a lo sumo un conjunto numerable.

21. Probar que  $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{C} : \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty\}$ , con  $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$ , es un

22. Sea  $(x_i)_{i \in I}$  una familia ortogonal en un espacio de Hilbert  $H$ .  $(x_i)_{i \in I}$  es sumable si y sólo si  $(\|x_i\|^2)_{i \in I}$  es sumable y en tal caso

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2.$$

23. *Desigualdad de Bessel*: Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una familia ortonormal en  $H$  y  $x \in H$  entonces  $(|\langle x, x_i \rangle|^2)_{i \in I}$  es una familia sumable y

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

24. Demostrar que todo espacio de Hilbert  $H$  admite una base y que dos bases cualesquiera son coordinables.

25. (a) Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si todo sistema ortonormal es a lo sumo numerable.

(b) Si  $\#(I) > \aleph_0$ ,  $\ell^2(I)$  no es separable.

26. Sea  $H$  un espacio de Hilbert.

(a) Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una base de  $H$ , entonces  $\forall x \in H$

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \quad \wedge \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$$

(b) Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una base de  $H$ , entonces  $H$  es isométricamente isomorfo a  $\ell^2(I)$ .

(c) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a  $\ell^2(\mathbb{N})$ .