Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2016

TOPOLOGÍAS DÉBILES

El último minuto también tiene 60 segundos- Fernando Marcos

1. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

2. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \to x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.

3. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}_n$ que tiende fuertemente a x.

4. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$.

5. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $S := \{x \in E : \|x\| < 1\}$. Probar que en (E, w) S tiene interior vacío.

6. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.

7. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

8. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$.

   (a) $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

   (b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

9. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

   (a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. ¿Es cierto que $\varphi_n \to 0$ fuertemente?

   (b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión w^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, w^*)$ es compacta?

10. Sean $\varphi_n : C([-1, 1]) \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(f) = f\left(-\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right).$$

    Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

11. Si $1 \leq p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

    (a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

    (b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{w^*} 0$, $e^n \overset{w}{\not\to} 0$, $e^n \not\to 0$

12. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces,

$$x^n \xrightarrow{w} x \Longleftrightarrow \sup \|x^n\|_p < \infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \forall k$$

13. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0, 1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{B}(L^2[0, 1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \Longleftrightarrow M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{w} M_\varphi(f) \quad \forall f \in L^2[0, 1].$$

14. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \cdot \|_\infty$ pero no en la topología w^*.

15. Sean $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definidas por $\varphi_n(x) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

    (a) Probar que $\varphi_n \in c_0'$ y calcular sus normas.

    (b) Probar que $\varphi_n \overset{w^*}{\to} 0$ y que $\varphi_n \overset{w}{\not\to} 0$.

    (c) Probar que $c_0 \supset {}^\perp\langle\varphi_1\rangle \supset {}^\perp\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle \supset \ldots \supset {}^\perp\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle \supset \ \ldots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿Ocurre lo mismo con ${}^\perp\langle\varphi_i : \ i \in \mathbb{N}\rangle$?

16. Sean E un espacio de Banach y $J : E \to E''$ la inclusión canónica.

    (a) $J(B_E)$ es fuertemente cerrado, donde B_E es la bola unidad cerrada de E.

    (b) Dar un ejemplo en el que J no sea suryectiva.

17. Sean E y F espacios de Banach, $(A_n)_n \in \mathcal{B}(E,F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F'$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}_n$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}_n$ está acotada.

18. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E'$.

    (a) Probar que existe $x \in E, x \neq 0$ tal que $\varphi(x) = \|\varphi\| \, \|x\|$.

    (b) Si M es un subespacio cerrado propio de E', existe $x \in {}^\perp M$, $\|x\| = 1$ tal que $\varphi(x) = d(\varphi, M)$.

19. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ w^*-convergente.

20. Sea E un espacio de Banach reflexivo.

    (a) Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E, entonces tiene una subsucesión w-convergente.
    (Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S' es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)

    (b) Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E', entonces tiene una subsucesión w^*-convergente.

21. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E'$, $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \overset{w^*}{\to} 0$.
