**Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2016**

OPERADORES ACOTADOS: OPERADOR ADJUNTO- OPERADORES NO ACOTADOS

*... te largan a la cancha sin preguntarte si querés entrar.*

**Operadores Acotados: Operador Adjunto:**

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz asociada al operador $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definido como $Tx := Ax$. Probar que $T'$ tiene como matriz asociada a $A^t$.

2. **(a)** Sea $1 \le p < \infty$. Sean $S$ y $T$ son los operadores shifts definidos en el Ejercicio 4 de la práctica anterior. Calcular $S'$ y $T'$.

   **(b)** Si $J : \ell^2 \to c_0$ es $J(x) := x$, probar que $J \in \mathcal{B}(\ell^2, c_0)$ y calcular $J'$.

3. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Se definen los operadores
$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \to L^p(\Omega) \ \text{ y } \ e : L^p(\Omega) \to L^p(\tilde{\Omega}),$$
dados por $\rho(u) = u \mid_\Omega$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que $\rho$ y $e$ son acotados. Calcular sus normas y sus adjuntos, $\rho'$ y $e'$.

4. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación $M_\varphi(f) = \varphi f$. Calcular $M'_\varphi$.

5. Sea $V : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$ el operador de Volterra $Vu(x) = \int_0^x u(t)dt$. Probar que $V \in \mathcal{B}(L^1([0,1]))$ y calcular $V'$.

6. Sea $E$ un espacio vectorial normado. Si $A, B \in \mathcal{B}(E)$ entonces $(AB)' = B'A'$.

7. Sean $E, F$ espacios de Banach y $A \in \mathcal{B}(E, F)$. Probar que:

   **(a)** $\|A\| = \|A'\|$.

   **(b)** Si $A$ es inversible, entonces $A'$ es inversible y $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

   **(c)** La aplicación $\Phi : \mathcal{B}(E, F) \to \mathcal{B}(F', E')$ dada por $\Phi(A) = A'$ es una isometría.

8. Sean $E, F$ espacios de Banach y $A \in \mathcal{B}(E, F)$. Probar que:

   **(a)** $R(A)^\perp = \ker(A')$ **(b)** $^\perp R(A') = \ker(A)$

   **(c)** $\overline{R(A)} = {}^\perp \ker(A')$ **(d)** $R(A') \subseteq (\ker(A))^\perp$

9. Sean $E$ un espacio de Banach, $F \subset E$ un subespacio y $\Phi : E' \to F'$ dada por $\Phi(\varphi) := \varphi|_F$.

   **(a)** Probar que $\Phi \in \mathcal{B}(E', F')$, $\Phi$ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.

   **(b)** Probar que si definimos $i : F \to E$ como $i(x) := x$, entonces $i' = \Phi$.

   **(c)** Si $F$ es reflexivo, calcular $\Phi'$.

10. Si $E$ y $F$ son espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que $R(T)$ cerrado, entonces $R(T')$ es cerrado y vale que
$$R(T') = (\ker(T))^\perp$$

11. Sean $E$ un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces son isomtricamente isomtricos:
$$(E/S)' \cong S^\perp \ \text{ y } \ E'/S^\perp \cong S'.$$

**Operadores No Acotados:**

12. Si $D(A) = \{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^2$ es el operador definido por $Ax = (nx_n)_{n\geq 1}$:

    **(a)** Probar que $D(A)$ es denso en $\ell^2$.

    **(b)** Probar que $A$ es lineal y no acotado.

    **(c)** Hallar $D(A')$ y $A'$.

13. Si $D(A) = \{x \in \ell^2 : x \in \ell^1\}$ y $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^1$ es el operador definido por $Ax = x$:

    **(a)** Probar que $D(A)$ es denso en $\ell^2$.

    **(b)** Probar que $A$ es lineal y no acotado.

    **(c)** Hallar $D(A')$ y $A'$.

14. Si $D(A) = \{f \in L^2[0,1] : \int_0^1 |f(t^2)|^2 \, dt < \infty\}$ y $A : D(A) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ es el operador definido por $(Af)(t) = f(t^2)$:

    **(a)** Probar que $D(A)$ es denso en $L^2[0.1]$.

    **(b)** Probar que $A$ es lineal y no acotado.

    **(c)** Hallar $D(A')$ y $A'$.

15. Si $D(A) = \{f \in L^2[0,1] : f \in C[0,1]\}$ y $A : D(A) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ es el operador definido por $(Af)(t) = t\,f(0)$:

    **(a)** Probar que $D(A)$ es denso en $L^2[0,1]$.

    **(b)** Probar que $A$ es lineal y no acotado.

    **(c)** Hallar $D(A')$ y $A'$.

---

**Definición:** *Si $E$ y $F$ son espacios de Banach, un operador $A : D(A) \subset E \to F$ se dice* **cerrado** *si $Gr(A)$ es cerrado en $E \times F$.*

---

16. Si $D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : t\,f(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$ y $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es el operador definido por $(Af)(t) = t\,f(t)$:

    **(a)** Probar que $D(A)$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

    **(b)** Probar que $A$ es lineal y no acotado.

    **(c)** Hallar $D(A')$ y $A'$.

    **(d)** Probar que $A$ es cerrado.

17. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado e inversible, entonces $A^{-1} : R(A) \subset F \to E$ es un operador cerrado.

18. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado e inversible tal que $R(A) = F$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{B}(F, E)$

19. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ un operador cerrado, entonces $\ker(A)$ es cerrado.

20. Sean $E$ y $F$ espacios de Banach, un operador $A : D(A) \subset E \to F$ es cerrado si y sólo si $D(A)$ con la norma $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ es un espacio de Banach.

21. Si $E$ y $F$ son espacios de Banach, $A : D(A) \subset E \to F$ es un operador lineal, cerrado con dominio denso, entonces

$$\ker(A) = {}^{\perp}R(A') \quad \text{y} \quad \ker(A') = R(A)^{\perp}.$$

---