Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2016

FUNCIONALES LINEALES - TEOREMA DE HAHN-BANACH

"No soy creyente. En España, todos los 22 jugadores se santiguan antes de salir al campo. Si resultara, siempre sería empate", Johan Cruyff (1947-2016)

1. Si E es un espacio vectorial, y $\varphi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal no nulo, entonces $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{C}$.

2. Sean E un espacio vectorial normado y $\varphi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal. Son equivalentes:

   (a) φ es continua.

   (b) φ es continua en 0.

   (c) φ es acotada.

   Probar además, que φ es continua si y sólo si $\ker(\varphi)$ es cerrado.

3. Sean E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una funcional lineal.

   (a) Si φ es no acotada, entonces toma todos los valores reales en cualquier entorno de 0.

   (b) φ es continua si y sólo si $\forall\ c \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x : \varphi(x) < c\}$ y $\{x : \varphi(x) > c\}$ son abiertos.

   (c) Si $A \subset E$ tiene interior no vacío y $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \geq a\ \forall x \in A$, entonces φ es continua.

4. Sean E un espacio vectorial normado y $\varphi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal con la siguiente propiedad:

   $$\forall (x_n)_n \subset E \text{ tal que } \|x_n\| \to 0\ \Rightarrow (\varphi(x_n))_n \text{ es acotada.}$$

   Entonces, φ es continua.

5. Sea $E' := \{\varphi : E \to \mathbb{C} :\ \varphi \text{ es lineal y continua}\}$ el espacio dual de E. Entonces

   $$\|\varphi\|_{E'} := \sup\{|\varphi(x)| : x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$$

   es una norma sobre E', que hace de E' un espacio de Banach.

   Probar las siguiente igualdades:

   $$\begin{aligned} \|\varphi\|_{E'} &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E,\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E,\ \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\tfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\} \end{aligned}$$

   Probar además, que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|,\ \forall\ x \in E$.

6. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

   (a) $\varphi : c \to \mathbb{C},\ \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

   (b) $\varphi : L^2[-1,1] \to \mathbb{C},\ \varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} tf(t)\ dt$.

   (c) $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{C},\ \varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} tf(t)\ dt$.

   (d) $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{C},\ \varphi(x) = x_1 + x_2$.

   (e) $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C},\ \varphi(x) = x_1 + x_2$.

   (f) $\varphi : \ell^1 \to \mathbb{C},\ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

(g) $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}.$

(h) $\varphi : c_0 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$

7. Sean E un espacio de Banach, $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$ e $y \in E \setminus \ker(\varphi)$.

   (a) $E = \ker(\varphi) \oplus \langle y \rangle$.

   (b) $d(y, \ker(\varphi)) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$.

   (c) Si $H := \{x \in E :\ \varphi(x) = m\}$, entonces $d(0, H) = \frac{|m|}{\|\varphi\|}$.

8. **(a)** Probar que en todo espacio vectorial normado de dimensión finita cualquier funcional lineal es continua.

   (b) Sea $L_0(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que existe un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0\ \forall t \neq [a, b]$.
   Probar que $(L_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado. Además, si definimos $\varphi : L_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $\varphi(f) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt$ resulta que φ es una funcional lineal no acotada.

9. Consideremos, en c_0, la familia $\{e^n\}_{n\geq 1}$ de sucesiones definidas por $(e^n)_i := \delta_{n,i}$ y sea x^0 la sucesión dada por $(x^0)_i := \frac{1}{i}$.

   (a) Verificar que $A = \{x^0, e^1, e^2, \ldots, e^n, \ldots\}$ es un conjunto l.i. de c_0.

   (b) Sea B una base algebraica de c_0 que contenga a A. Llamemos $\{b^j\}_{j\in J}$ al conjunto $B \setminus A$. Probar que todo $x \in c_0$ se escribe de manera única como

   $$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i \in J} \alpha_j b^j$$

   donde los coeficientes son nulos salvo finitos.
   Además, si $f : c_0 \to \mathbb{C}$ se define como $f(x) := \alpha_0$, probar que f es una funcional lineal no continua.

10. Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi, \psi \in E'$ tales que $\varphi\psi = 0$, entonces $\varphi = 0$ ó $\psi = 0$.

11. **(a)** Sea $y \in \ell^1$. Sea $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ la funcional

    $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

    Probar que $\varphi \in {c_0}'$ con $\|\varphi\|_{c_0'} = \|y\|_1$.

    (b) Sea $\varphi \in c_0^*$, mostrar que la sucesión dada por $y_n := \varphi(e_n)$, donde $e_n = (\delta_k^n)_{k\geq 1}$ pertenece a ℓ^1.

    (c) Probar que las aplicaciones definidas en (a) y en (b) son una la inversa de la otra, y deducir que $c_0' \cong \ell^1$ (isométricamente isomorfos).

    (d) De manera análoga, probar que $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ y que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

12. **(a)** Sea I un conjunto de índices cualquiera, probar que $\ell^2(I)^* \cong \ell^2(I)$.

(b) Si E y F son espacios vectoriales normados isométricamente isomorfos entonces también lo son sus duales.

Definición: *Un subespacio cerrado S de un espacio de Banach E se dice complementado si existe un subespacio cerrado T, tal que $E = S \oplus T$.*

---

13. Sea E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado.

    (a) Si S tiene dimensión finita, probar que S es complementado.

    (b) Probar (a) si S tiene codimensión finita.

14. **(a)** Sea E un espacio vectorial normado, entonces $(\forall x \in E)$

$$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E',\ \|\varphi\| = 1\}$$

    (b) Sea E un espacio vectorial normado, sean $x, y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$ $\forall \varphi \in E'$, entonces $x = y$.

15. Sean E un espacio vectorial normado y $S \subset E$ un subespacio. Si $x \in E$ es tal que $d = d(x, S) > 0$, entonces $\exists\ \varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x) = d$ y $\varphi(y) = 0$ $\forall y \in S$.

    Sugerencia: Sea $H := \langle S, x\rangle$. Considerar $\psi : H \to \mathbb{C}$ por $\psi(\lambda x + y) = \lambda d$, $\forall y \in S \, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

16. Sea E un espacio vectorial normado y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Un punto y_0 es límite de combinaciones lineales $\sum_{j=1}^{N} c_j\, x_j$ si y sólo si $\forall \varphi \in E'$, que verifique que $\varphi(x_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.

17. Sean E y F espacios vectoriales normados. Probar que existe un isomorfismo entre $(E \times F)'$ y $E' \times F'$.

18. Sea S un subespacio de un espacio de Banach E. Si S no es denso en E, entonces existe $\phi \in E'$, $\phi \neq 0$ tal que $\phi\,|_S = 0$.

19. Sean E un Banach y S un subespacio de E. Probar que

$$\overline{S} = \bigcap_{\{\phi \in E' \ S \subset \ker(\phi)\}} \ker(\phi).$$
