Análisis Funcional - 1° Cuatrimestre 2016

Espacios de Banach

Los equipos se arman de atrás para adelante

1. (a) Si $1 \leq p \leq \infty$, $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \quad \text{p.c.t. } n\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado (más aún, es denso para $1 \leq p < \infty$).
   (b) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio, entonces $\overline{S}$ es un subespacio.
   (c) Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado de E, entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. (a) Sean K un espacio topológico compacto, el espacio
$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} \text{ continuas}\}$$
y la norma infinito $\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|$.
Probar que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.
   (b) Si $K \subseteq \mathbb{C}^n$ es un compacto, entonces $C(K)$ es separable.

3. Sea $(E, \| \, \|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:
   (a) E es Banach.
   (b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo.
   (c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo.

Definición: *Sea E un espacio vectorial, y sean $\| \, \|$ y $\| \, \|'$ dos normas definidas sobre E. Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si $\exists a, b > 0 / \|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \quad \forall x \in E$.*

---

4. (a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.
   (b) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.
   (c) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre E hace de E un espacio de Banach.
   (d) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces S es cerrado.

5. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión finita, $\overline{B}(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta.

6. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F \; \exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea
$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$$
Sugerencia: *Considerar el conjunto $S := \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$ y ver que $y_0 \in S$.*

7. ***Lema de Riesz***. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio cerrado propio (o sea, no es todo ni cero) y $0 < a < 1$, entonces existe $x_a \in E$, $\|x_a\| = 1$ tal que $d(x_a, F) \geq a$.

   Sugerencia: *Sea* $x \in E - F$, $d = d(x, F) > 0$, *tomar* $y_0 \in F$ *tal que* $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$ *y probar que tomando* $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$ *sirve.*

8. Sea E un espacio vectorial normado, $\overline{B}(0,1)$ es compacta si y sólo si $\dim E < \infty$.

9. (a) Sean E un espacio vectorial normado y $S \subseteq E$ un subespacio, entonces

$$S^\circ \neq \emptyset \Leftrightarrow S = E.$$

   (b) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $\dim E > \aleph_0$.

10. Un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

11. Sea E un espacio vectorial normado, E es de Banach si y sólo si $\forall (x_n)_n \subset E$ vale que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

12. Sean E y F espacios vectoriales normados. En $E \times F$, definimos $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$. Probar que:

   (a) $(E \times F, \| \ \|)$ es un espacio vectorial normado.

   (b) Si E y F son espacios de Banach, $E \times F$ resulta un espacio de Banach.

   (c) La inclusión $J_E : E \to E \times F$ dada por $J_E(x) = (x, 0)$ y la proyección $P_E : E \times F \to E$ dada por $P_E(x, y) = x$ son ambas continuas. Lo mismo vale para J_F y P_F.

13. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.

   (a) Probar que E/S es un espacio vectorial.

   (b) Si definimos en E/S la norma $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x, S)$, probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.

   (c) Si $\Pi : E \to E/S$ es la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$, ver que Π es lineal, que $\|\Pi\| \leq 1$ y que Π es abierta.

   (d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

14. Sean E un espacio de Banach, $S, T \subset E$ subespacios cerrados con $\dim T < \infty$, entonces $S + T$ es cerrado.

15. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Sea Ω un dominio compacto en $I\!R^N$.

   (a) $C^1(\Omega)$ $\quad \|f\| := \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty$.

   (b) $C^r(\Omega)$ $\quad \|f\| := \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty + \cdots + \sum \|f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}}\|_\infty$.

   (c) $Lip(\Omega)$ $\quad \|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$.

   (d) $C^\alpha(\Omega)$ $\quad \|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$ $\quad 0 < \alpha < 1$. ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?.

(e) Espacios de Sobolev.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)/\ \forall 1 \leq i \leq N,\ \exists g_i \in L^p(\Omega) \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega f(x)\varphi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

$$\|f\| := \|f\|_{L^p} + \sum \|g_i\|_{L^p}.$$

(f) Espacio de Variación Acotada.

$$BV([0,1]) = \{f \in C([0,1])/ \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}$$

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$
