ALGEBRA LINEAL - 1er Cuatrimestre 2016

Práctica 7 - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matrices A siguientes (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Para cada una de las matrices $A \in K^{n\times n}$ del ejercicio anterior, sea $\mathcal{E}$ una base de V, donde V es un K-e.v. de dimensión n, y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ dado por $[f]_{\mathcal{E}} = A$. Decidir si es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal, y en caso afirmativo, calcular $C(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

3. Hacer lo mismo que en los dos ejercicios anteriores para las siguientes matrices, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

4. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

6. Probar que si λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^t. ¿Con el mismo autovector?

7. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el endomorfismo derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector asociado.

8. *a*) Diagonalizar las siguientes matrices encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, calcular $\det(A_\alpha)$ donde

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(Sug: observar que $\det(A_\alpha) = \mathcal{X}_A(\alpha)$, donde A es la matriz del inciso *a*))

9. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

10. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$ tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

11. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo nilpotente (es decir existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k veces) es el endomorfismo nulo) no nulo. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

12. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que si para todo $x \in K^n$, x y Ax son linealmente dependientes, entonces $A = c \cdot \mathrm{Id}_n$ para algún $c \in K$.

13. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_\mathcal{B}$ sea diagonal.
b) Calcular $f^k := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k veces), $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

15. Se define la siguiente sucesión de números enteros de la manera siguiente:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_2 := 1, \quad \text{y} \quad a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n, \ \forall\ n \geq 0.$$

Hallar una fórmula para el término a_n, $n \in \mathbb{N}$.

16. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6\,x_n + 2\,y_n \\ y_{n+1} = 2\,x_n + 3\,y_n \end{cases}.$$

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \to 0$ (es decir:$(A^n)_{ij} \to 0$, $1 \leq i, j \leq 3$).

18. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes.

a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

b) Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.

c) Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

19. En una ciudad, los días pueden ser soleados (1), nublados (2) o lluviosos (3). El coeficiente a_{ij} de la matriz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ siguiente representa la probabilidad de que el día de mañana esté i si hoy está j:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

(por ejemplo, si hoy llueve, la probabilidad de que mañana esté nublado es 0.6).
Calcular (aproximadamente) la probabilidad de que dentro de 100 días llueva si hoy llueve.

20. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - 7y(t) \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

21. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

a) Probar que las matrices de $K^{(m+n)\times(m+n)}$ $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ son semejantes.

b) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

22. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X - 1$, $P = X^2 - 1$, $P = (X - 1)^2$

b) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

23. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $\operatorname{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

24. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

    a) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5\,\mathrm{Id}_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de Id_2.

25. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que f es un automorfismo si y solo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo, y en ese caso expresar f^{-1} en función de f, $f \circ f$ etc.

26. *a*) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$.

    b) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$, entonces A es inversible, no tiene autovalores reales y n tiene que ser par.

27. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ ortonormal de $\mathbb{C}^n$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

28. Sea $A \in K^{m\times m}$ y $B \in K^{n\times n}$. Probar que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ se diagonaliza en $K^{(m+n)\times(m+n)}$ si y solo si A y B se diagonalizan.

29. Sean $A, B \in K^{n\times n}$ dos matrices que conmutan.

    a) Probar que si x es un autovector de A con autovalor λ, entonces Bx también lo es.

    b) Probar que si A y B son diagonalizables, entonces se las puede diagonalizar usando una misma base para ambas.

30. ($\star$) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz con n autovalores distintos.

    a) Probar que si A es diagonal y $B \in K^{n\times n}$ conmuta con A, entonces B es diagonal también. Deducir que en ese caso existe un polinomio $h \in K[\lambda]$ con $\mathrm{gr}(h) < n$ (o $h = 0$) tal que $B = h(A)$.

    b) Probar qus $B \in K^{n\times n}$ conmuta con A si y solo si existe $h \in K[\lambda]$ tal que $B = h(A)$.

31. ($\star$) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz con traza nula. Probar que A es semejante a una matriz B cuyos coeficientes de la diagonal son todos nulos.
    Sugerencia: existe $x \in K^n$ tal que x y Ax son linealmente independientes (cf. Ej. 12). Completar x y Ax a una base de K^n y considerar la matriz de la multiplicación por A en esa base.