ALGEBRA LINEAL - 1er Cuatrimestre 2016

Práctica 2 - Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre K, $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $k \cdot 0_V = 0_V$,
   b) $k \cdot v = 0_V \Rightarrow k = 0_K$ ó $v = 0_V$,
   c) $-(-v) = v$,
   d) $-0_V = 0_V$.

2. Probar que el conjunto $\mathbb{R}_{>0}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con con la suma $\oplus$ y el producto por escalares $\otimes$ definidos por:

$$a \oplus b = a.b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \big(m/n\big) \otimes a = a^{m/n},\ \forall\, a \in \mathbb{R}_{>0},\ m/n \in \mathbb{Q}.$$

3. Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

4. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.

   a) $K_n[X] := \{f \in K[X] \ :\ f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$
   b) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ :\ f''(1) = f(2)\}$
   c) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ :\ f'' + 3f' = 0\}$
   d) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ :\ \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$
   e) $K^{(\mathbb{N})} := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} :\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0, \forall\, k \geq n\}$.

5. Mostrar que $\{f \in K[X] \ :\ f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

6. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K-espacios vectoriales

   a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \ :\ x + y - z = 0\,;\ x - y = 0\}$, $K = \mathbb{Q}$,
   b) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ :\ A = -A^t\}$, $K = \mathbb{R}$,
   c) $\{A \in \mathbb{C}^{3\times 3} \ :\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $K = \mathbb{C}$,
   d) $K_n[X]$,
   e) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] \ :\ f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $K = \mathbb{R}$,
   f) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ :\ f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$,
   g) $\mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{R}$.

8. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\} = \langle \mathrm{sen}\, x, \cos x\rangle$.

   (Sugerencia: Para $\subseteq$ probar que si $f'' + f = 0$, entonces $f'(x)\cos x + f(x)\,\mathrm{sen}\, x$ es una función constante, cuyo valor es $f(\frac{\pi}{2})$. Deducir que $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})\,\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

9. Sea V un K-espacio vectorial y sean v, $w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

a) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, w+5v\rangle$.

b) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, aw+bv\rangle$, $\forall\, a, b \in K$.

c) $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, aw+bv\rangle$, $\forall\, a \in K-\{0\}$, $b \in K$.

d) $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_3,\, v_4,\, w\rangle \Rightarrow \langle v_1,\, v_2\rangle = \langle v_3,\, v_4\rangle$.

e) $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_1,\, v_2\rangle \;\Leftrightarrow\; w \in \langle v_1, v_2\rangle$.

10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K.

a) $\{(1-i, i),\, (2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.

b) $\{(1-X)^3,\, (1-X)^2,\, 1-X,\, 1\}$ en $K[X]$

c) $\{\operatorname{sen} x\,,\, \cos x\,,\, x\cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$

d) $\{e^x\,,\, x\,,\, e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$

e) $u = (1,0,1,0,1,\dots)$, $v = (0,1,0,1,0,\dots)$, $w = (1,1,0,1,1,0,\dots)$ en $K^{\mathbb{N}}$

11. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

a) $\{(1,2,k),\, (1,1,1),\, (0,1,1-k)\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $\{(k,1,0),\, (3,-1,2),\, (k,2,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

12. Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

13. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

a) $\langle (1,4,-2,1),\, (1,-3,-1,2),\, (3,-8,-2,7)\rangle$

b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$

c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \,:\, f(2) = f(-1)\}$

d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \,:\, f(2) = f'(2) = 0\}$

e) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, a_i = a_j,\ \forall\, i, j\}$

14. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.

a) $\{A \in K^{n\times n} /\, A = A^t\}$ (matrices simétricas)

b) $\{A \in K^{n\times n} /\, A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas), $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$,

c) $\{A \in K^{n\times n} /\, A_{ij} = 0$ si $i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

d) $\{A \in K^{n\times n} /\, A_{ij} = 0$ si $i \neq j\}$ (matrices diagonales)

e) $\{A \in K^{n\times n} /\, A_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)

f) $\{A \in K^{n\times n} /\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$

15. Para cada una de las matrices A siguientes sobre $\mathbb{R}$, determinar su espacio fila $E_F(A)$, su espacio columna $E_C(A)$, su espacio nulo $N(A)$, el rango fila $\mathrm{rg}_F(A)$, el rango columna $\mathrm{rg}_C(A)$ y la dimensión de $N(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}.$$

16. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

a) $\{(1,1,1,1),\ (0,2,1,1)\}$, $V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

b) $\{X^3 - 2X + 1,\ X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{R}$.

17. Extraer una base de los siguientes subespacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

a) $\langle (1,1,2),\ (1,3,5),\ (1,1,4),\ (5,1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

b) $\langle X^2 + 2X + 1,\ X^2 + 3X + 1,\ X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{C}$

18. Hallar la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

a) $\langle (1,k,1),\ (-1,k,1),\ (0,1,k) \rangle$

b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

19. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) \rangle$$

20. Dados los subespacios $S = \langle (1,2,1,0), (2,1,0,1) \rangle$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$, hallar un subespacio $U \subset \mathbb{R}^4$ de dimensión 2 que satisface $S \cap T \subset U \subset T$.

21. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) : x + z = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = \langle (1,1,0), (5,7,3) \rangle$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle$ y $T = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$

d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1,\ X,\ X^2,\ X^3 + 2X^2 - X,\ X^5 \rangle$

e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$

22. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

23. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios del K-espacio vectorial V que satisfacen $S \oplus T = V$.

    a) $V = K^K$, $S = \{f \in K^K : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in K^K : f$ es constante$\}$
    b) $V = K^{n\times n}$, $S = \{A \in K^{n\times n} : A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n\times n} : A = -A^t\}$ para K un cuerpo tal que $2 \neq 0$ en K.

24. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

    a) $S = \langle (1, 2, -1, 3),\ (2, 3, -2, 1),\ (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
    b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3\times3}$
    c) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

25. Mostrar que si S, T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

26. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).

    a) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus \langle v \rangle = V$.
    b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
    c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

27. Determinar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:

    a) $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $v = (1, 2, -1)$ y $v = (x_1, x_2, x_3)$
    b) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3,\ X + 1,\ X^2 + 5,\ X^3 + X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$
    c) $V = \mathbb{R}^{2\times2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$