ALGEBRA LINEAL - 1er Cuatrimestre 2016

Práctica 1 - Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

(En todas las prácticas, K es un cuerpo; en general $K = \mathbb{Q}$ (los números racionales), $\mathbb{R}$ (los números reales) o $\mathbb{C}$ (los números complejos))

1. Cuando sea posible, calcular $A + 2B$, $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Exhibir matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \neq 0$, tales que $A^2 = -\operatorname{Id}_2$ y $B^2 = 0$.

3. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Mostrar un contrajemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) $(AB)^2 = A^2B^2$,

   b) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$,

   c) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$,

   d) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$,

   e) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = \operatorname{Id}_n$,

   f) $A^j = 0$ para algún $j \geq 2 \Rightarrow A = 0$,

   g) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

   h) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

4. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $A, B \in K^{n\times n}$ para que valga la igualdad en el ejercicio 3, incisos *g*) y *h*).

5. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

6. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $e_i \in K^n$ el vector columna que tiene un 1 en el lugar i y 0 en los otros lugares. Calcular $A\, e_i$.

7. Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3\times 3} / \, AB = BA \ , \forall\, B \in K^{3\times 3}\}$.

8. Sean $A, B \in K^{n\times n}$.

   a) Probar que si A y B son triangulares superiores, entonces AB es triangular superior.

   b) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), entonces $A^n = 0$.

9. *a*) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times p}$. Probar que $(A\,B)^t = B^t\, A^t$.

   b) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$. Probar que $\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(B\,A)$.

10. *a*) Sea $A \in K^{m\times n}$. Probar que $A\,A^t \in K^{m\times m}$ y $A^t\,A \in K^{n\times n}$ son matrices simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A\,A^t \neq A^t\,A$ para $m = n$.
    b) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ matrices simétricas. ¿Vale que $A\,B$ es simétrica?
    c) Para $K = \mathbb{R}$, probar que: $A = 0 \;\Leftrightarrow\; A\,A^t = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tr}(A\,A^t) = 0$.

11. *a*) Probar que si $A \in K^{m\times n}$ satisface que $A\,x = 0, \forall\, x \in K^n$, entonces $A = 0$.
    b) Probar que si $A, B \in K^{m\times n}$ satisfacen que $A\,x = B\,x, \forall\, x \in K^n$, entonces $A = B$.

12. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
    a) $A,\, B \in GL(n, K) \;\Rightarrow\; A + B \in GL(n, K)$,
    b) $\operatorname{tr}(A) = 0 \;\Rightarrow\; A \notin GL(n, K)$,
    c) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \;/\; A^j = 0$) $\Rightarrow\; A \notin GL(n, K)$.

13. Sea $A \in GL(m, K)$ y sean $B,\, C \in K^{m\times n}$. Probar:
    a) $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$
    b) $AB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$.

14. Sea $A \in GL(n, K)$. Probar que $A^t \in GL(n, K)$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

15. Si $A \in K^{n\times n}$ tiene una fila o una columna de ceros, ¿puede ser inversible?

16. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$, y los sistemas homogéneos asociados. ¿Cambia algo si se resuelven sobre $\mathbb{C}$ o sobre $\mathbb{Q}$?

    a) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

    c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

    b) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

    d) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

    Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

17. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

18. Resolver sobre $\mathbb{C}$ el sistema
$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

19. Determinar los valores de α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene solución:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \gamma \end{cases}$$

20. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cada uno de los sistemas siguientes tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. En el caso de los sistemas homogéneos, si la solución es única, ¿cuál es?

$a)$ $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 &= 0 \\ (a^2-4)x_3 &= 0 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 &= 0 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= b \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= -1 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 &= -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 &= b \end{cases}$

21. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si la matriz escalón reducida correspondiente a A es la matriz identidad. Deducir que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si A es inversible. (En cuyo caso esa única solución es $x = A^{-1}b$.)

22. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$d)$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$e)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f)$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$