Aplicaciones de la Forma de Jordan

Observación

Sea $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz en forma de Jordan:

J está formada de bloques en la diagonal de la forma

$$J(\lambda_0;m) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(\lambda_0, m) = \underbrace{\lambda_0 \, Id_m}_{\text{escalar}} + \underbrace{J(0,m)}_{\text{nilpotente}}$$

Es obvio que $\lambda_0 Id_m$ y $J(0,m)$ conmutan:

$$\lambda_0 Id_m \cdot J(0,m) = J(0,m)\, \lambda_0 Id_m = \lambda_0 J(0,m)$$

y más en general

$$(\lambda_0 Id_m) \cdot (J(0,m))^k = \lambda_0 J(0,m)^k, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Y si J es una matriz de Jordan general:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{pmatrix}$$

donde cada J_i es algún $J(\lambda_i, m_i)$

se tiene, dado que la multiplicación es bloque a bloque:

J = D + N con D diagonal, N nilpotente

que conmutan:

$$DN = ND = \begin{pmatrix} \lambda_1 J(0,m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t J(0,m_t) \end{pmatrix}$$

I) Potencias de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

a) Potencias de $J(\lambda_0, m)$

Sea $J := J(\lambda_0, m) = \lambda_0 Id_m + J(0,m)$

Entonces
$$J^k = \left(\lambda_0 Id_m + J(0,m)\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda_0 Id_m)^j \, J(0,m)^{k-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^j \, J(0,m)^{k-j}$$

Por ejemplo:

$$J(\lambda_0, m)^2 = \lambda_0^2 Id_m + 2\lambda_0 J(0,m) + J(0,m)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 & & & \\ 2\lambda_0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 2\lambda_0 & \lambda_0^2 \end{bmatrix}$$

$$J(\lambda_0, m)^3 = \lambda_0^3 Id_m + 3\lambda_0^2 J(0,m) + 3\lambda_0 J(0,m)^2 + J(0,m)^3 = \begin{bmatrix} \lambda_0^3 & & & & \\ 3\lambda_0^2 & \ddots & & & \\ 3\lambda_0 & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 3\lambda_0 & 3\lambda_0^2 & \lambda_0^3 \end{bmatrix}$$

hasta por ejemplo:

$$J(\lambda_0, m)^{m-1} = \begin{bmatrix} \lambda_0^{m-1} & & & & \\ (m-1)\lambda_0^{m-2} & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \binom{m-1}{j}\lambda_0^j & & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \cdots & \binom{m-1}{j}\lambda_0^j & \cdots & \lambda_0^{m-2} & \lambda_0^{m-1} \end{bmatrix}$$

y para $k \geq m$

$$J(\lambda_0, m)^k = \begin{bmatrix} \lambda_0^k & & \\ \vdots & \ddots & \\ \binom{k}{m-1}\lambda_0^{k-m+1} & \cdots & \lambda_0^k \end{bmatrix}$$

(b) Potencias de una matriz de Jordan J

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} \quad \text{donde cada } J_i \text{ es algún } J(\lambda_i, m_i)$$

Entonces $$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_s^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) Potencias de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$A \simeq J \leftarrow$ forma de Jordan de A

$$A = PJP^{-1} \text{ con } P \in GL(n, \mathbb{C}) \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1}$$

II Exponencial de una matriz

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Vamos a ver que esta definición tiene sentido $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (i.e. que la serie converge) y además como calcular e^A

(a) $A = \lambda_0 \, Id_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriz escalar: $e^{\lambda_0 Id_n} = e^{\lambda_0} \cdot Id_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(b) $A = J(0,n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bloque de Jordan nilpotente:

Para $J(0,n) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la cuenta $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J(0,n)^k}{k!}$.

tiene sentido:

$$e^{J(0,n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J(0,n)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J(0,n)^k}{k!}$$

$$= Id_n + J(0,n) + \frac{J(0,n)^2}{2} + \frac{J(0,n)^3}{6} + \dots + \frac{J(0,n)^{n-1}}{(n-1)!}$$

i.e. $$e^{J(0,n)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1/2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1/(n-1)! & \dots & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

c) $A = J(\lambda_0; n)$ bloque de Jordan:

$$J(\lambda_0, n) = \lambda_0 \, Id_n + J(0, n).$$

Como $e^{\lambda_0 Id_n} = e^{\lambda_0} Id_n$ y $e^{J(0,n)}$ tienen sentido (las series convergen) y además $\lambda_0 Id_n$ y $J(0,n)$ conmutan, entonces vale

$$e^{J(\lambda_0,n)} = e^{\lambda_0 Id_n + J(0,n)} = e^{\lambda_0 Id_n} \cdot e^{J(0,n)} = e^{\lambda_0} e^{J(0,n)}$$

(con la misma demostración que en $\mathbb{C}$, $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$, $e^Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k}{k!}$

$\Rightarrow e^{X+Y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^k}{k!} = e^X \cdot e^Y$). Así

$$e^{J(\lambda_0,n)} = e^{\lambda_0} e^{J(0,n)} = e^{\lambda_0} \left(Id_n + J(0,n) + \dots \frac{J(0,n)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

$$= e^{\lambda_0} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J(\lambda_0,n)^k}{k!} \right)$$

d) $A = J$ matriz de Jordan

Si $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{bmatrix}$ donde cada J_i es de la forma $J(\lambda_i, m_i)$

entonces $e^J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_s} \end{bmatrix}$

e) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ arbitraria

Sea $A = PJP^{-1}$ con $P \in GL(n, \mathbb{C})$, J forma de Jordan de A

Entonces $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PJP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} P \frac{J^k}{k!} P^{-1} =$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!} \right) P^{-1} = P e^J P^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

(módulo detalles formales)

Observación

1. $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\quad AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$
2. Si $A = D + N$ con D diagonal, N nilpotente que conmutan, entonces $e^A = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \left(Id_n + N + \dots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!} \right)$

(permite calcular la exponencial aún sin la forma de Jordan exacta).

Resolución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\Sigma'(t) = A\,\Sigma(t) \quad \text{para } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ y } \Sigma(0) \text{ cond. inicial}$$

entonces $\Sigma(t) = e^{At}\,\Sigma(0)$

Demostración $\quad \Sigma'(t) = A\,\Sigma(t)$

Multipliquemos ambos lados por e^{-At} y pasemos todo a la izq:

$$\Rightarrow \quad e^{-At}\Sigma'(t) - e^{-At} \cdot A\,\Sigma(t) \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ y } e^{-At} \text{ conmutan!}}}{=} e^{-At}\Sigma'(t) - A \cdot e^{-At} \cdot \Sigma(t)$$

$$\left[e^{-At}\Sigma(t)\right]' = 0 \Rightarrow e^{-At}\Sigma(t) = e^{-A\cdot 0}\Sigma(0) = \Sigma(0)$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma(t) = e^{At}\,\Sigma(0). \qquad \boxtimes$$

Ejemplo

Resolver $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$ con $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 \Rightarrow J(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$A - 3\,Id = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$: $\quad e_1 \mapsto -e_1 + e_2 \mapsto 0 \qquad$ Base: $(e_1, -e_1+e_2)$

$\Rightarrow \quad A = P\,J\,P^{-1}$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{At} = e^{PJtP^{-1}} = P\,e^{Jt}\,P^{-1}$ con $e^{Jt} = e^{\begin{pmatrix} 3t & 0 \\ t & 3t \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}}$

$= e^{3t} \cdot \left[Id + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right] = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

Así $e^{At} = e^{3t} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$

Luego $\Sigma(t) = e^{At}\,\Sigma(0) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{3t}(1-3t) \\ x_2(t) = e^{3t}(2+3t) \end{cases} \qquad \boxtimes$

Fin!