Polinomios en matrices y en endomorfismos

Sea V un K-e.v, y $f \in End_K(V)$; sea $A \in K^{n \times n}$

Para $h(\lambda) = a_d \lambda^d + \dots + a_1 \lambda + a_0 \in K[\lambda]$,

definimos

- $h(A) := a_d A^d + \dots + a_1 A + a_0 Id_n \in K^{n \times n}$
- $h(f) := a_d f^d + \dots + a_1 f + a_0 Id \in End_K(V)$

(donde $f^k := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k}$)

Ejemplos

- Si $h(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 3$, entonces $h(A) = A^3 - 2A^2 + A - 3Id_n$
- Si $h(\lambda) = \lambda^k$, entonces $h(A) = A^k$
- Si $h(\lambda) = -\lambda + \lambda_0$, $\lambda_0 \in K$, ent $h(A) = -A + \lambda_0 Id_n$
- $\chi_B(\lambda) \in K[\lambda]$, tiene sentido $\chi_B(A) \in K^{n \times n}$.

Propiedades

1. Sea $\dim(V) < \infty$, $\mathcal{B}$ base de V y $f \in End_K(V)$. Sea $h \in K[\lambda]$,

entonces $[h(f)]_{\mathcal{B}} = h([f]_{\mathcal{B}})$

Es decir, si $[f]_{\mathcal{B}} = A$, entonces $[h(f)]_{\mathcal{B}} = h(A)$

(Esto es pues $[f \circ f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^2$ y en general $[\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k}]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^k$ etc.)

2. Sean $h_1, h_2 \in K[\lambda]$. Entonces

$$(h_1 h_2)(A) = h_1(A)\, h_2(A) = h_2(A)\, h_1(A) = (h_2 h_1)(A)$$

$$(h_1 h_2)(f) = h_1(f) \circ h_2(f) = h_2(f) \circ h_1(f) = (h_2 h_1)(f)$$

(las matrices en general no conmutan, ni los endomorfismos, pero polinomios en una misma matriz o en un mismo endomorfismos sí conmutan, pues $A^{k+j} = A^k \cdot A^j = A^j \cdot A^k = A^{j+k}$ y de la misma forma $f^{k+j} = f^k \circ f^j = f^j \circ f^k = f^{j+k}$, y esta propiedad del producto de monomios se extiende por linealidad al producto de polinomios)

3. En particular, si $h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$, entonces

$h(A) = (A - \lambda_1 Id_n)^{m_1} \dots (A - \lambda_r Id_n)^{m_r}$ (y en cualquier orden)

$h(f) = (f - \lambda_1 Id)^{m_1} \dots (f - \lambda_r Id)^{m_r}$ ← Aquí producto = composición

Proposición (relación con semejanza) Sea $h(\lambda) \in K[\lambda]$

Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Si $B = P^{-1}AP$ con $P \in GL(n, K)$,

entonces $h(B) = P^{-1}h(A)P$.

(En particular $A \simeq B \Rightarrow h(A) \simeq h(B)$, pero con la misma matriz de paso!)

Demostración Si $h(\lambda) = a_d\lambda^d + \dots + a_1\lambda + a_0$, entonces

$$h(B) = a_d B^d + \dots + a_1 B + a_0 Id_n$$
$$= a_d P^{-1}A^dP + \dots + a_1P^{-1}AP + a_0 P^{-1}Id_nP$$
$$= P^{-1}(a_dA^d + \dots + a_1A + a_0Id_n)P = P^{-1}h(A)P. \quad \boxtimes$$

Proposición (relación con diagonalización)

Sea V un K-e.v. y $f \in End_K(V)$, y sea $A \in K^{n\times n}$.

① Si $\lambda_0 \in K$ es autovalor de f con autovector asociado $v \in V$, entonces, $\forall h \in K[\lambda]$, $h(\lambda_0) \in K$ es autovalor de $h(f)$ asociado al mismo autovector $v \in V$.

①' Si $\lambda_0 \in K$ es autovalor de A con autovector asociado $x \in K^n$, entonces $h(\lambda_0) \in K$ es autovalor de $h(A) \in K^{n\times n}$, con el mismo autovector asociado x $(\forall h \in K[\lambda])$

② Si f se diagonaliza, entonces $h(f)$ se diagonaliza, $\forall h \in K[\lambda]$, en la misma base que diagonaliza a f.

②' Si $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (para $P \in GL(n, K)$)

entonces, $\forall h \in K[\lambda]$, se tiene

$$P^{-1}h(A)P = \begin{pmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Demostración:

① y ①': $f(v) = \lambda_0 v \Rightarrow f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda_0 v) = \lambda_0 f(v) = \lambda_0^2 v$

y así inductivamente $\forall k \in \mathbb{N}$: $f^k(v) = \lambda_0^k v$

Luego, si $h(\lambda) = a_d\lambda^d + \dots + a_1\lambda + a_0$, $h(f) = a_df^d + \dots + a_1f + a_0 Id \Rightarrow$

$h(f)(v) = a_df^d(v) + \dots + a_1f(v) + a_0Id(v) = a_0\lambda_0^d v + \dots + a_1\lambda_0 v + a_0 v = h(\lambda_0).v$

② Si $\mathcal{B}$ es una base de autovectores de V con autovalores λ_v, $v \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ sigue siendo una base de autovectores de V con autovalores $h(\lambda_v)$, $v \in \mathcal{B}$. ③

②' Sale también como lo anterior, pero podemos hacer otra demo directa:
Por la proposición anterior, es inmediato que $P^{-1}h(A)P = h(D)$

donde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Pero $h(D) = h\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{pmatrix}$

pues para $h(\lambda) = \lambda^k$, se tiene $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ y sigue por linealidad:

$$h(D) = a_d D^d + \dots + a_1 D + a_0 \mathrm{Id}_n = a_d \begin{pmatrix} \lambda_1^d & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^d \end{pmatrix} + \dots + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_d\lambda_1^d + \dots + a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_d\lambda_n^d + \dots + a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $2, -2, 1$. Entonces A es diagonalizable s/$\mathbb{R}$ por tener 3 autovalores distintos en $\mathbb{R}$. Pero además $h(A) = A^2 + A - 2\mathrm{Id}_3$ también es diagonalizable, con autovalores $h(2) = 4$, $h(-2) = 0$ y $h(1) = 0$, o sea $\dim(N(A^2 + A - 2\mathrm{Id}_3)) = 2$.

Polinomios anuladores y Teorema de Cayley - Hamilton

Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces $\{\mathrm{Id}_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ no puede ser un cjto l.i pues son $n^2 + 1$ matrices y $\dim(K^{n\times n}) = n^2$.
Es decir $\exists\, a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in K$ no todos nulos tales que

$$a_{n^2} A^{n^2} + a_{n^2-1} A^{n^2-1} + \dots + a_1 A + a_0 \mathrm{Id}_n = 0$$

es decir $h(A) = 0$ para $h(\lambda) = a_{n^2}\lambda^{n^2} + \dots + a_1\lambda + a_0$ no nulo

De hecho, seguro que también existe algún polinomio de grado $\leq n^2 - 1$.
¿Por qué?

Observación: Si $A \in K^{n\times n}$ es diagonalizable, i.e.

$$A \simeq D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\text{no necesariamente todos } \neq)$$

entonces $\chi_A(\lambda) = \chi_D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

$$y \quad \chi_A(A) \simeq \chi_A(D) = \begin{pmatrix} \chi_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_A(\lambda_n) \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{K^{n\times n}}$$

pues $\chi_A(\lambda_i) = 0$ por ser λ_i raíz. Es decir:
$\chi_A(A) \simeq \mathbb{O}$. Pero eso implica $\chi_A(A) = \mathbb{O}$!

Esto ocurre aún cuando A no es diagonalizable:

Teorema de Cayley-Hamilton (William Hamilton, 1805-1865
Arthur Cayley, 1821-1895)

1. Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces $\chi_A(A) = \mathbb{O} \in K^{n\times n}$
2. Sea V un K-e.v de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Entonces $\chi_f(f) = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$

Demostración: (hay muchas demostraciones, y probablemente veamos más de una en el curso, o volverá a aparecer de $\neq$ formas)

Sea $B(\lambda) = \lambda\, Id_n - A \in K^{n\times n}[\lambda]$. Entonces $\det(B(\lambda)) = \chi_A \in K[\lambda]$

Por otro lado, si consideramos $\mathrm{Adj}(B(\lambda))$, sabemos que

$$\mathrm{Adj}(B(\lambda)) . B(\lambda) = \det(B(\lambda)).\, Id_n = \chi_A(\lambda).\, Id_n$$

Ahora bien, $\mathrm{Adj}(B(\lambda))_{ij} = (-1)^{j+i} \underbrace{\det((B(\lambda))(j|i))}_{\text{tiene grado } \leq n-1 \text{ en } \lambda}$

Luego cuando desarrollamos $\mathrm{Adj}(B(\lambda))$ como polinomio en λ, se tiene $\mathrm{Adj}(B(\lambda)) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0 \in K^{n\times n}[\lambda]$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \Rightarrow B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix}$

y $\mathrm{Adj}(B(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{11} \end{pmatrix} = Id.\,\lambda + \begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$

Pongamos $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0 \in K[\lambda]$

$\mathrm{Adj}(B(\lambda)) . B(\lambda) = \chi_A(\lambda)\, Id_n$, es decir

$$(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + B_1\lambda + B_0)(\lambda Id_n - A) = (\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0)\, Id_n$$

Esto implica las siguientes igualdades matriciales (p/c potencia de λ)

$$\begin{cases} B_{n-1} = Id_n \\ -B_{n-1} . A + B_{n-2} = c_{n-1}\, Id_n \\ \vdots \\ -B_1 A + B_0 = c_1\, Id_n \\ -B_0 A = c_0\, Id_n \end{cases}$$

Yo quiero $\chi_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0\, Id_n$

Luego multiplico la 1ª igualdad por A^n, la 2da por A^{n-1}, la anteúltima por A y la última por nadie, y luego sumo:

$$\begin{cases} B_{n-1} A^n = A^n \\ -B_{n-1} A^n + B_{n-2} A^{n-1} = c_{n-1} A^{n-1} \\ \vdots \\ -B_1 A^2 + B_0 A = c_1 A \\ -B_0 A = c_0\, Id_n \end{cases}$$

$$0 = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0\, Id_n = \chi_A(A)$$

$\boxtimes$

Observación Esto quiere decir que:

si V es un K-e.v. de dim. finita y $f \in \mathrm{End}_K(V)$, entonces el endomorfismo $\chi_f(f)$ es el endomorfismo <u>nulo</u>.

Es decir $\chi_f(f)(v) = 0$, $\forall v \in V$, o equivalentemente,

$\chi_f(f)(v_i) = 0$, $\forall \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

Aplicación

Sea $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Entonces si $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0 \in K[\lambda]$, se tiene $c_0 \neq 0$ y $A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_2 A + c_1 Id_n)$