Transformaciones lineales y Matrices

Sean V, W K-e.v con $\dim_K(V) = n$, $\dim_K(W) = m$, y sean $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ y $\mathcal{B}'$ bases (ordenadas) de V y W respectivamente.

Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(V,W) & \xrightarrow{\Phi} & K^{m\times n} \\ f & \longmapsto & [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[f(v_1)]_{\mathcal{B}'} \Big| \cdots \Big| [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \right] \end{array}$$

es biyectiva, y vale:

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}}$$

i.e: si $v = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$ y $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$,
ent $f(v) = \beta_1 w_1 + .. + \beta_m w_m$

Esto último es porque tanto

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & K^m \\ v & \longmapsto & f(v) & \longmapsto & [f(v)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & K^n & \longrightarrow & K^m \\ v & \longmapsto & [v]_{\mathcal{B}} & \longmapsto & [f(v)]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

son t.l., y coinciden en la base $\mathcal{B}$ de V pues

$[v_j]_{\mathcal{B}} = e_j$ y $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot e_j = [f(v_j)]_{\mathcal{B}'}$ por def. de $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Ejemplos

- En bases canónicas

① $f: K^n \to K^m$, con bases $\mathcal{E}$ de K^n, $\mathcal{E}'$ de K^m

$$[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = A_f$$

② $f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, con bases $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ y $\mathcal{E}' = (e_1, e_2, e_3)$

$p \mapsto (p(0), p'(0), p''(0))$

$$[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} Nu(f) = \langle x^3 \rangle \\ Im(f) = \langle e_1, e_2, 2e_3 \rangle = \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

③ $f: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f(A) = tr(A)$, con bases $\mathcal{E} = (E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22})$, $\mathcal{E}' = (1)$

$$[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- En bases no canónicas:

(4) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = ((\underbrace{1,-1,1,0}_{v_1}), (\underbrace{0,-1,0,1}_{v_2}), (\underbrace{0,0,1,0}_{v_3}), (\underbrace{1,1,1,0}_{v_4}))$ ¿bases?

$\mathcal{B}' = ((\underbrace{1,0,1}_{w_1}), (\underbrace{1,1,0}_{w_2}), (\underbrace{1,0,0}_{w_3}))$

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[f(v_1)]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, [f(v_2)]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, [f(v_3)]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, [f(v_4)]_{\mathcal{B}'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f(v_1) = (0,0,0) = 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 \Rightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{B}'} = (0,0,0)$

$f(v_2) = (0,0,0) \Rightarrow [f(v_2)]_{\mathcal{B}'} = (0,0,0)$

$f(v_3) = (0,1,-1) = -w_1 + w_2 \Rightarrow [f(v_3)]_{\mathcal{B}'} = (-1,1,0)$

$f(v_4) = (2,2,0) = 2w_2 \Rightarrow [f(v_4)]_{\mathcal{B}'} = (0,2,0)$

$\Rightarrow Nu(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$, $Im(f) = \langle -w_1 + w_2, 2w_2 \rangle$ ¿Por qué?

Observación (lo que vale en V vale con coordenadas en cualquier base)

$V \xrightarrow{[\,]_{\mathcal{B}}} K^n$: $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$

- $\{v_1, .., v_s\}$ li en $V \iff \{[v_1]_{\mathcal{B}}, .., [v_s]_{\mathcal{B}}\}$ li en K^n
- $\{v_1, .., v_r\}$ genera $V \iff \{[v_1]_{\mathcal{B}}, .., [v_r]_{\mathcal{B}}\}$ genera K^n
- $\{v_1, .., v_n\}$ base de $V \iff \{[v_1]_{\mathcal{B}}, .., [v_n]_{\mathcal{B}}\}$ base de K^n

(5) Mismo ejemplo que (4) con $\mathcal{B} = (v_3, v_4, v_1, v_2)$ y

$\mathcal{B}' = ((0,1,-1), (2,2,0), (0,0,1))$

En este caso $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Directamente se lee $Im(f) = \langle w'_1, w'_2 \rangle$ y $Nu(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(6) $id_V: V \to V$, misma base $\mathcal{B}$ de salida y llegada : $[id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = Id_n$

(Más aún si $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = Id_n$, entonces $f = id_V$ ¿por qué?)

Proposición: (Matriz de composición y de inversa)

(1) Sean U, V, W K-e.v de dims n, m, p respectivamente con bases ordenadas $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ resp, y sean $f: U \to V$ y $g: V \to W$ t.l. Entonces

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

2. Sean V, W e.v de dim n, y $f: V \to W$ t.l. Entonces

f es inversible $\iff$ $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es inversible, $\forall\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V, W resp.

En ese caso $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

Esquemita útil:

$$\begin{tikzcd} U^{(n)}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & V^{(m)}_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "g"] & W^{(p)}_{\mathcal{B}''} \end{tikzcd}$$

Demostración

1. $[g\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}[u]_{\mathcal{B}} = [g\circ f(u)]_{\mathcal{B}''} = [g(f(u))]_{\mathcal{B}''}$

$$= [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[f(u)]_{\mathcal{B}'} \quad\text{y}\quad [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[f(u)]_{\mathcal{B}'}$$

Luego como vale la igualdad, $\forall\, [u]_{\mathcal{B}}$ (o sea $\forall\, x \in K^n$), vale que $[g\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

2. ($\Longrightarrow$)

$$\begin{tikzcd} V^{(n)}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_V"'] & W^{(n)}_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "f^{-1}"] & V^{(n)}_{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$$

$f^{-1}\circ f = id_V \implies [id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [f^{-1}\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

$\implies Id_n = [f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

O sea $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in GL(n, K)$ y $[f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

($\Longleftarrow$) si $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ inversible, considero la t.l. $g: W \to V$ definida por la matriz $[f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, es decir considero la única t.l. $g: W \to V$ tq $[g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Probemos que $g = f^{-1}$.

$[g\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Id_n \implies g\circ f = id_V$, y recíprocamente $f\circ g = id_W$. Luego $g = f^{-1}$ ⊠

La t.l. Identidad en distintas bases

$$\begin{tikzcd} V^{(n)}_{\mathcal{B}} \arrow[r, bend left, "id_V"] & V^{(n)}_{\mathcal{B}'} \arrow[l, bend left, "id_V"] \end{tikzcd} \qquad \mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n) \text{ base}$$

$$[id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[v_1]_{\mathcal{B}'} \;\middle|\; [v_2]_{\mathcal{B}'} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [v_n]_{\mathcal{B}'} \right] \in GL(n,K)$$

satisface: $[id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}'}$

Toma las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$ y devuelve las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}'$. Se la suele llamar matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y notar $C(\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

$C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = [id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es inversible, y $C(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1} = C(\mathcal{B}',\mathcal{B})$

Recíprocamente, toda matriz $P \in K^{n\times n}$ inversible es la matriz de un cambio de base: Si $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ es base de V, y sea $P^{-1}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. Entonces $\mathcal{B}'=(w_1,\dots,w_n)$ con $w_j = a_{1j}v_1+\dots+a_{nj}v_n$ es base de V también, y $C(\mathcal{B},\mathcal{B}')=P$.

pues alcanza verlo para las coordenadas $\{w_1,\dots,w_n\}$ base de V $\Leftrightarrow$ $\{[w_1]_{\mathcal{B}},\dots,[w_n]_{\mathcal{B}}\}$ base de K^n pero $[w_j]_{\mathcal{B}}=(a_{1j},\dots,a_{nj})$ y la matriz que forman (por columnas) es inversible: tiene rango n y las columnas son l.i. por lo tanto, luego base.

Además $C(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = P^{-1} \Rightarrow C(\mathcal{B},\mathcal{B}') = P$.

Interludio (Matrices y Rangos)

- Sea $A\in K^{n\times n}$. Entonces A es inversible $\Leftrightarrow$ $rg(A)=n$
  (pues por ejemplo $f_A: K^n\to K^n$ inversible $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}(f_A)) = rg(A) = n$)
- Sea $A\in K^{m\times n}$ y $Q\in GL(m,K)$, entonces $N(A)=N(QA)$ y en particular $rg(A)=rg(QA)$
  (pues $AX=0 \Leftrightarrow QAX=0$ por ser Q inversible)
- Sea $A\in K^{m\times n}$ y $P\in GL(n,K)$, entonces $rg(AP)=rg(A)$
  (pues si $\{v_1,\dots,v_s\}$ es base de $N(A)$, ent $\{P^{-1}v_1,\dots,P^{-1}v_s\}$ es base de $N(AP)$)

Matrices equivalentes

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

① ¿$\exists\ \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^3$: $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Id_3$?

No: pues f sería inversible (por tener matriz inversible en un juego de bases) y se ve que no lo es pues $rg(A) = 2$, de hecho $Im(f) = \langle (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ por ejemplo.

② ¿$\exists\ \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^3$: $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

Si se cumple lo pedido, con $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$, se tendrá $Nu(f) = \langle v_3 \rangle$ e $Im(f) = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$. En particular $\dim Nu(f) = 1$ y $\dim Im(f_A) = 2$.

Se tiene $Nu(f) = \langle (-1,1,1) \rangle$, $Im(f) = \langle (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ las dimensiones coinciden!

Alcanza con fijar $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ y $v_3 = (-1,1,1)$ (son base)

y $w_1 = (0,1,1)$, $w_2 = (1,0,1)$, $w_3 = (1,0,0) \leftarrow$ cualquiera para completar

luego
$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ f(v_2) &= w_2 \\ f(v_3) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Luego existen.

③ $\exists\ \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^3$: $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

No pues en este caso no coinciden las dimensiones de Núcleo e Imagen.