FCEyN - UBA - 1er cuatrimestre 2016

Álgebra I
Práctica 7 - Polinomios

Generalidades

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de $f \in \mathbb{Q}[X]$ en los casos

i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$.

ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$.

iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$.

2. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

i) $f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

ii) $f = (X - 3\,i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$.

iii) $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$ en $\mathbb{Q}[X]$.

iv) $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$.

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$.

iii) $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$.

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$.

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X^3 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$, $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iv) $f = X^5 + X^3 + X + 1$, $g = 2X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

v) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.

iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.
Probar que

i) $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.

ii) Si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.

iii) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

v) ¿Qué se obtiene al trabajar con los polinomios de $\mathbb{R}[X]$ módulo $X^2 + 1$?

7. Hallar el resto de la división de f por h para

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $\quad h = X^{31} - 2$,
ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1, \quad h = X^6 + 1$,
iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1$,

en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $a \in K$. Probar que en $K[X]$ vale:

i) $X - a \mid X^n - a^n$.
ii) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.
iii) Si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

Calcular los cocientes en cada caso.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.
ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X$.
iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1$.

10. Sea $X^{(n)} := X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(X-i) \in \mathbb{Z}[X]$.

Para cada polinomio $P(X)$ se definen $\Delta P(X) := P(X+1) - P(X)$.

Probar que

i) $\Delta X^{(n)} = nX^{(n-1)}$.
ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} i^{(n)} = \frac{k^{(n+1)}}{n+1}$.
iii) $\Delta^k P(X) = 0$ para todo $k > \mathrm{gr}(P)$.
iv) $\displaystyle P(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} X^{(k)}$.

$*$ **11**. Sean $P_1, P_2, \dots, P_n$ los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio 1.

i) Calcular en función de $n \in \mathbb{N}$ el producto de las distancias de un vértice dado a los demás, esto es

$$P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4 \dots P_1P_n$$

ii) Hallar en función de $n \in \mathbb{N}$ el producto de las longitudes de las diagonales del polígono.

$*$ **12**. *(Números de Stirling de segunda especie)* Sea $S(n,k)$ el número de particiones de un conjunto de n elementos con exactamente k partes.

i) Probar que $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k) X^{(k)}$ donde los polinomios $X^{(k)}$ son los del ejercicio 10.

Sugerencia: contar funciones $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, x\}$ con $x \in \mathbb{N}$.

ii) Hallar $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 8 tal que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^7 = P(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$*$ **13**. Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(0), P(1), \ldots, P(n-1)$ y $P(n)$ son números enteros. Probar que $P(m) \in \mathbb{Z}$ para todo entero m y que $n!P(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Sugerencia: Ejercicio 10, item (iv).

Evaluación y raíces

14. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.

16. i) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

ii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.

iii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas raíces complejas son exactamente 1, $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{5}$.

17. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

i) Hallar

(a) $a + b + c$,
(b) $ab + ac + bc$,
(c) abc,
(d) $a^2 + b^2 + c^2$,
(e) $a^3 + b^3 + c^3$,
(f) $a^4 + b^4 + c^4$,
(g) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$,
(h) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$,
(i) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$.

18. *Evaluación de polinomios:* Sea $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in K[X]$. Queremos calcular la cantidad de sumas y productos necesarios para calcular $f(\alpha)$, $\alpha \in K$, por medio de los siguientes algoritmos:

i) *Algoritmo ingenuo:* Se calculan todos los α^k recursivamente, guardando todos los resultados, luego se multiplica cada uno por su coeficiente a_k y se suma. ¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizaron?

ii) *Método de Horner* (por el matemático inglés William George Horner, 1786-1837, aunque también era conocido por el matemático italiano Paolo Ruffini, 1765-1822, y mucho antes en realidad por el matemático chino Qin Jiushao, 1202-1261). Es el algoritmo que describe el mecanismo siguiente:

$$\begin{aligned} n = 2: &\quad f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha a_2) \\ n = 3: &\quad f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha a_3)) \\ n = 4: &\quad f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \alpha a_4))) \end{aligned}$$

Y en general

$$f(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \cdots + \alpha(a_{n-2} + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)) \cdots))).$$

¿Cuántas sumas y cuántos productos se utilizaron?

19. *(Polinomio interpolador de Lagrange)* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$. Probar que

$$f = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$$

es el único polinomio en $\mathbb{C}[X]$ que es nulo o de grado menor o igual que n y que satisface $f(a_k) = b_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.

20. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que

i) $f(1) = 3$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$.   ii) $f(2) = 0$, $f(-3) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$.

21. i) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

ii) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$.

22. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 7$ con a, b, c, d enteros distintos.
Probar que $f(m) \neq 14$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

23. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que

i) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$.   ii) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$.

24. Hallar las raíces en $\mathbb{C}$ y factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 - 2X + 10 = 0$.

ii) $X^2 = 3 + 4\,i$.

iii) $X^2 + (1 + 2\,i)\,X + 2\,i = 0$.

iv) $X^2 + (3 + 2\,i)\,X + 5 + i = 0$.

25. Hallar las raíces en $\mathbb{Q}$ y factorizar en $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 + 6X - 1 = 0$.   ii) $X^2 + X - 6 = 0$.

26. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

27. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{7} i}$. Probar que $\omega + \omega^2 + \omega^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$.

28. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

29. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $X^3 f' = f^2$.

30. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$.

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2$, $a = \frac{1}{2}$.

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$.

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - (X-2)(X+7)$, $a = 2$.

v) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1)$, $a = 2$.

vi) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3$, $a = 2$.

31. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en $\mathbb{C}$.

32. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ tales que $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en $\mathbb{C}$.

33. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

34. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

35. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

36. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

37. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ tiene todas sus raíces complejas simples.

38. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X-i)(f_n + f_n'),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

39. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = X f_n^2 + X^2 f_n',\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\operatorname{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

40. i) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de f si y sólo si es raíz de multiplicidad $k-1$ de $(f : f')$.

ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si f es irreducible, entonces tiene todas sus raíces (en $\mathbb{C}$) simples.

$*$ **41**. Sea $P(x)$ un polinomio de grado a lo sumo n tal que $P(i) = \dfrac{1}{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Hallar $P(n+1)$.

$*$ **42**. Sea $P(x)$ un polinomio de grado a lo sumo n tal que $P(i) = 2^i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Hallar $P(n+1)$.

Factorización

43. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$.
ii) $X^4 + 3$.
iii) $X^7 - (-1+i)$.
iv) $X^{11} - 2\,i\,(\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i)^{-1}$.
v) $X^6 - (2-2i)^{12}$.
vi) $X^{12} + X^6 + 1$.

44. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^3 - 1$. ii) $X^4 - 1$. iii) $X^6 - 1$. iv) $X^8 - 1$.

45. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 8$. ii) $X^4 + 3$. iii) $X^{12} + X^6 + 1$.

46. i) Probar que $(X^n - 1 : X^m - 1) = X^{(n:m)} - 1$.

ii) Hallar $(X^{a^n-1} - 1 : X^{a^m-1} - 1)$ para $a \geq 2$ entero.

47. Hallar todas las raíces racionales de

i) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$.
ii) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$.
iii) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.
iv) $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$.

48. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

i) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.

ii) $X^4 - 6X^2 + 1$.

iii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz.

iv) $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.

v) $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple de f.

vi) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

vii) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que una de sus raíces es una raíz sexta primitiva de la unidad.

49. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6.

50. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f.

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.

iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.

iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.

51. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

52. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

53. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio

$$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$

Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

54. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad.

Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

55. Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $f_z = X^3 - 2zX^2 - z^2X + 2z \in \mathbb{C}[X]$.

i) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ las tres raíces de f_z. Probar que $\alpha\beta\gamma = -2z$.

ii) Determinar los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales f_z tiene dos raíces cuyo producto es igual a 2. Para cada valor hallado factorizar f_z en $\mathbb{C}[X]$.

56. *(Lema de Gauss)* Sea p un número primo y $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio. Supongamos que todos los coeficientes de f son múltiplos de p y que $f(X) = f_1(X)f_2(X)$ con $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que alguno de los factores f_1, f_2 tiene todos los coefficientes múltiplos de p.

Sugerencia: Considerar $\overline{f}, \overline{f_1}, \overline{f_2} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

57. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 7 tal que toma alguno de los valores 1 o -1 para 7 valores enteros diferentes de X. Probar que f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

58. Encontrar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(X-a)(X-10)+1$ sea reducible en $\mathbb{Z}[X]$.

59. Encontrar $a, b, c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ distintos tales que $X(X-a)(X-b)(X-c)+1$ sea reducible en $\mathbb{Z}[X]$.

$*$ **60**. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros distintos.

i) Probar que $(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)-1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

ii) Probar que $(X-a_1)^2(X-a_2)^2\ldots(X-a_n)^2+1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.