Álgebra I
Práctica 6 - Números complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z^{-1})$, $\mathrm{Im}(z^{-1})$, $\mathrm{Re}(-i \cdot z)$ e $\mathrm{Im}(i \cdot z)$.

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$.

ii) $z = 5\,i(1+i)^4$.

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$.

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}\,i(1-i)^3$.

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^{179}$.

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-1}$.

vii) $z = \overline{1-3\,i}^{\,-1}$.

2. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z.

ii) w.

iii) $z+w$.

iv) $z-w$.

v) $-z$.

vi) $2z$.

vii) $\frac{1}{2}w$.

viii) iz.

ix) $\overline{z}$.

x) $\overline{3z+2w}$.

xi) $\overline{iz}$.

xii) $|z|$.

xiii) $|2z|$.

xiv) $|z+w|$.

xv) $|z-w|$.

xvi) $|\overline{w-z}|$.

3. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 3\,\mathrm{Re}(z) - 1 = 2\,\mathrm{Im}(z)\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 2 \leq |z-1+i| \leq 3\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z.\,\mathrm{Im}(z).(1-i) = |z|^2\}$

v) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| = |z-1-i|\}$

4. Probar que

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

ii) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

iii) $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iv) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{\,-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

v) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

vi) $z.\overline{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

vii) $|z.w| = |z|.|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

viii) $|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ix) $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

x) $||z| - |w|| \leq |z-w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

xi) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

xii) $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

i) $z \neq 0$ y $z = \overline{z}^{\,-1}$

ii) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$

iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

iv) $|z|^2 = (z+\overline{z}).\,\mathrm{Im}(z)$

v) $z^2 + |z^2| = i.\overline{z}$

vi) $|z - \overline{z}| = \mathrm{Re}(z)$

vii) $i(z^2+4) = z.\,\mathrm{Im}(z)$

viii) $z^2 = 3+4i$

ix) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$

x) $z^2 + (1+2i)z + 2i = 0$

6. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3-4i$

iv) $z = -15+8i$

7. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3 + \sqrt{3}\,i$.

ii) $(2 + 2\,i)(\sqrt{3} - i)$.

iii) $(-1 - i)^{-1}$.

iv) $(-1 + \sqrt{3}\,i)^5$.

v) $(-1 + \sqrt{3}\,i)^{-5}$.

vi) $\dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{1 - i}$.

8. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, \arg(-i\,z) > \frac{\pi}{4}\}$.

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$.

9. i) Determinar la forma binomial de $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{1 - i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}\,i)$.

10. Hallar en cada caso las raíces n-avas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8,\ n = 6$

ii) $z = -4,\ n = 3$

iii) $z = -1 + i,\ n = 7$

iv) $z = 2\,i\,(\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i)^{-1}$, $n = 11$

v) $z = (2 - 2i)^{12},\ n = 6$

vi) $z = 1,\ n = 8$.

11. i) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

ii) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

iii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

12. Probar que $\displaystyle\prod_{\omega \in G_n} \omega = (-1)^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

13. Determinar las raíces n-ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12.

14. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$.

15. Dado un número primo p, probar que:

i) la suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad es -1.

ii) la suma de las raíces p^2-ésimas primitivas de la unidad es 0.

iii) Si q es un número primo distinto de p, entonces la suma de las raíces pq-ésimas primitivas de la unidad es 1.

iv) ¿Cuánto da la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad si n es un producto de primos distintos?

16. Sea $m \in \mathbb{Z}$ un entero par y $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva $2m$-ésima de la unidad. Probar que $(\omega - 1)^m$ es imaginario puro.

17. Sea $\omega_{23} \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva de la unidad de orden 23. Hallar la parte real de $\displaystyle\sum_{k=1}^{11} \omega_{23}^{k^2}$.

18. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\mathrm{Re}((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)) = 0$.

19. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$

20. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.

21. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

22. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} &= w^5 \\ w^{14n} &= w^{21} \end{cases}$$

23. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

24. Probar que no es posible hallar tres puntos del plano con coordenadas enteras que sean los vértices de un triángulo equilátero.

25. Sobre los lados del cuadrilátero $ABCD$ se dibujan exteriormente los cuadrados BAB_1A_2, CBC_1B_2, DCD_1C_2 y ADA_1D_2 de centros O_{AB}, O_{BC}, O_{CD} y O_{DA} respectivamente. Probar que los segmentos $O_{AB}O_{CD}$ y $O_{BC}O_{DA}$ son perpendiculares y de la misma longitud.

26. Sea $\omega \in G_k$ una raíz $k-$ésima primitiva de la unidad. Hallar $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \omega^{in}$ en función de $n \in \mathbb{N}$.

27. Hallar $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$ en función de $n \in \mathbb{N}$.