FCEyN - UBA - 1er cuatrimestre 2016

Álgebra I
Práctica 3 - Números Naturales e Inducción

<u>*Sumatoria*</u>

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$,
(b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$,
(c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$,
(d) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$,
(e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$,
(f) $n + 2n + 3n + \cdots + n^2$.

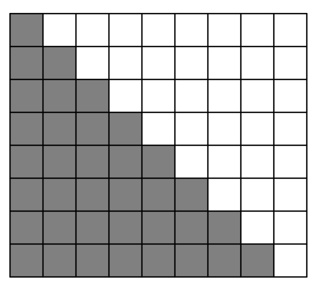
ii) Reescribir cada uno de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a) $5 \cdot 6 \cdots 99 \cdot 100$, (b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdots 1024$, (c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$.

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$, iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$, iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$, v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$.

3. i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$.

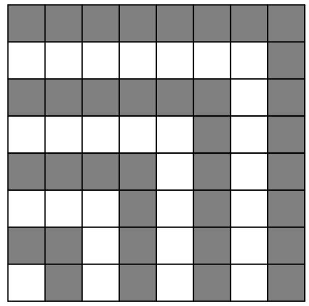
4. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (4i + 1)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$.

<u>*Inducción*</u>

5. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3,

iii) usando el principio de inducción.

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la suma geométrica: para todo $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

8. Sea $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$, ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$, iii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$, iv) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i)q^i$.

9. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$,

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$.

10. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$),

iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\displaystyle\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

iv) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$.

v) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i i}{(2i-1)(2i+1)}$.

11. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$,

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$.

v) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$,

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$,

vii) $\dbinom{2n}{n} \geq \dfrac{2^{2n}}{2n}$.

12. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

13. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}$, $\forall\, n \geq 5$,

ii) $3^n - 2^n > n^3$, $\forall\, n \geq 4$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5$, $\forall\, n \geq 3$,

iv) $\dbinom{2n}{n} > n\, 2^n$, $\forall\, n \geq 4$.

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

i) la cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$,

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $\pi\,(n-2)$.

Recurrencia

15. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \dbinom{2n}{n}$.

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 3$, $\quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = n\, a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iv) $a_1 = 2$, $\quad a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

17. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (n+1)^3, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

(Sugerencia: usar los Ejercicios 10(i), 6 y 9.)

18. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^3$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular de otra manera $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (c.f. Ej. 6).

19. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

ii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iii) $a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iv) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

v) $a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

vi) $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

21. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \dfrac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

22. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i\, a_i, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\Big), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \ + (n+1), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

23. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \frac{1}{3^{n-1}}\binom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$.

24. Sea $k > 1$ un entero. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = (k^2 - 2)\, a_{n+1} - a_n - 2(k-2), \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$, a_n es un cuadrado perfecto.

Más aún, probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale que $a_n = b_n^2$ donde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ está definida por

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+2} = k\, b_{n+1} - b_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

25. Sea $F_0 = 0, F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ la sucesión de Fibonacci.

Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

i) $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n},$

ii) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1},$

iii) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,$

iv) $\begin{cases} F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \\ F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1}), \end{cases}$

v) $F_{n+m} = F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m \quad \forall m \geq 0.$

vi) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$

26. Hallar la cantidad de sucesiones $b_1, \ldots, b_n$ de $n \geq 2$ bits (es decir, $b_i \in \{0,1\}$), que no contienen dos 1 consecutivos (es decir, $0 \in \{b_i, b_{i+1}\} \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$).

27. Para cada n hallar la cantidad de maneras de cubrir un tablero de $2 \times n$ con fichas de dominó de tamaño 2×1 sin huecos ni superposiciones.

28. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de Fibonacci del Ejercicio 25. Probar que

$$F_{n+1} = \sum_{k \leq n/2} \binom{n-k}{k}.$$

i) Por inducción.

ii) Con el ejercicio 26 o 27.

29. Probar que todo número natural n se puede escribir como suma de potencias de 2 distintas, incluyendo $2^0 = 1$. Sugerencia: considerar la mayor potencia de 2 menor o igual a n.

30. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de Fibonacci. Probar que todo número natural m se puede escribir como suma de k números de Fibonacci
$$m = F_{n_1} + \ldots + F_{n_k}$$
para cierto $k \in \mathbb{N}$, con subíndices $n_1, \ldots, n_k$ mayores que 1 y $n_i + 1 < n_{i+1}$, $\forall i < k$. Es decir, todo número natural puede escribirse como suma de distintos números no nulos de la sucesión de Fibonacci sin usar dos consecutivos. Probar además, que dicha representación es única.

31. Probar que todo $n \in \mathbb{N}$ puede escribirse como suma de números de la forma $2^a 3^b$ tales que ninguno de ellos divide a otro. Sugerencia: para n impar considerar $3^k \le n < 3^{k+1}$.

32. En este ejercicio no hace falta usar inducción: se puede pensar en el significado combinatorio de $\binom{n}{k}$ (como la cantidad de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos). Probar que

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,\ \forall\, n \ge 0.$

ii) $2^n \le \dbinom{2n}{n} < 4^n,\ \forall\, n \ge 1.$

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 4^n,\ \forall\, n \ge 0.$

iv) $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1},\ \forall\, n \ge k \ge 1.$

v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1},\ \forall\, n \ge 1.$

vi) $\displaystyle\sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l},\ \forall\, n, m, l \in \mathbb{N}.$

vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},\ \forall\, n \ge 0.$

33. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ para todo $n \ge 1$.

34. Derivar a izquierda y derecha la igualdad $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ y evaluar lo obtenido en $x = 1$. ¿Qué se obtiene? (Comparar con el Ej. 32(v)).

Problemas surtidos

35. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2,$

ii) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$

Sugerencia: Intentar probar una desigualdad más fuerte por inducción!

36. A un tablero de $2^n \times 2^n$ se le remueve un cuadradito. Probar que es posible cubrirlo usando fichas en forma de L formadas por tres cuadraditos, sin superponer fichas.

37. En cada planeta de un sistema hay un astrónomo observando al planeta más cercano. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Probar que si la cantidad de planetas es impar, entonces hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

38. Se dibujan n rectas en el plano, de forma tal que no haya dos paralelas ni tres concurrentes. Probar que es posible colorear las regiones formadas con solamente dos colores, de forma tal que no haya dos regiones adyacentes con el mismo color.

39. En cierto país, todas las rutas son de sentido único. Cada par de ciudades está conectado por exactamente una ruta directa. Demostrar que existe una ciudad a la cual se puede llegar desde cualquier otra o bien directamente, o pasando a lo sumo por una ciudad.

40. Sea $h : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(x,y) = x + \binom{x+y-1}{2}$. Decidir si es biyectiva.

Sugerencia: Calcular $\#\{h(x,y) :\ x + y \le N\}$ para todo $N \ge 1$.

41. Definimos la *media aritmética* de n números $a_1, \ldots, a_n$ reales positivos como

$$MA_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

y la *media geométrica* como

$$MG_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar la desigualdad *aritmético-geométrica* que afirma

$$MG_n(a_1, \ldots, a_n) \leq MA_n(a_1, \ldots, a_n)$$

y la igualdad sólo se da cuando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

i) Probarla para $n = 2$, es decir $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ y si $\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1+a_2}{2}$ entonces $a_1 = a_2$.

ii) Probar que si vale para n, también vale para $2n$.

iii) Probar que si vale para n, también vale para $n - 1$.

iv) Concluir que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

42. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Probar el *principio de inclusión-exclusión*

$$\# \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}} (-1)^{\#I+1} \# \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

donde la suma recorre todos los subconjuntos no vacíos de $1, \ldots, n$.

i) Por inducción en n.

ii) Usando el Ejercicio 33.

43. Probar que para todo $n \geq 6$ es posible dividir un cuadrado en n cuadrados más pequeños.

Sugerencia: Probar que si vale para n, vale para $n + 3$.

∗ **44**. Se marcan $2n$ puntos sobre una circunferencia. n se colorean de rojo y los restantes n de azul. Caminando sobre la circunferencia en sentido horario, se mantiene una cuenta de cuántos puntos rojos y azules se pasaron. Si en todo momento el conteo de puntos rojos es mayor o igual que el conteo de puntos azules, la caminata se dice exitosa. Probar que cualquiera sea la coloración inicial, es posible elegir un punto inicial que garantice una caminata exitosa.

∗ **45**. Los números desde el 1 hasta el $2n$ se dividen en dos grupos, cada uno con n elementos. Consideremos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ los números en el primer grupo y sean $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ los números del segundo grupo. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$

∗ **46**. El objetivo de este ejercicio es probar que cualquier sucesión de números naturales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}$ con $1 \leq a_i \leq i$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$, contiene una subsucesión no decreciente de largo $n + 1$. Supongamos que vale para $n < N$, y que tenemos un contraejemplo para $n = N$.

i) Probar que $N(k) = \#\{i : 1 \leq i \leq 2^N, a_i = k\} < N - j$ donde $2^j < k$.

ii) Probar que $N(1) < N + 1$.

iii) Sabiendo que $\displaystyle 2^N = \sum_{i=1}^{2^N} N(k) = N(1) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{2^i < k \leq 2^{i+1}} N(k)$, llegar a un absurdo.

<u>*Algoritmos y Complejidad*</u>

Se asume aquí que cualquier operación es igualmente *costosa*, es decir, dados dos números a y b contamos como *una operación* calcular $a+b$, $a \cdot b$, a/b, evaluar $a < b$, entre otros.

57. Cálculo de a^n para un número a dado y $n \in \mathbb{N}$

i) Algoritmo recursivo *secuencial*. Calcula las potencias de a mediante $a^{k+1} = a \cdot a^k$, $\forall\, k \geq 1$

```
Función potencia(a,n)
   Si n=0 Entonces
      Devolver 1
   Fin Si
   Devolver a × potencia(a,n-1)
Fin Función
```

¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^n?

ii) Algoritmo recursivo *divide y vencerás*.

- Para n par calcula a^n mediante $a^n = a^{n/2} \times a^{n/2}$.
- Para n impar calcula a^n mediante $a^n = a^{\lfloor n/2 \rfloor} \times a^{\lfloor n/2 \rfloor} \times a$.

```
Función potencia(a,n)
   Si n=0 Entonces
      Devolver 1
   Fin Si
   auxiliar:= potencia(a,⌊n/2⌋)
   Si n es par Entonces
      Devolver auxiliar × auxiliar
   Fin Si
   Devolver auxiliar × auxiliar × a
Fin Función
```

Calcular cuántas operaciones se realizan para calcular:

(a) a^8 (b) a^{2^k} (c) a^{13} (d) a^n

Observar que el segundo algoritmo es más eficiente.

58. Sea F_n la sucesión de Fibonacci. Demuestre que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

59. Verificar que las funciones `fibo1(n)`, `fibo2(n)` y `fibo3(n)` calculan de manera correcta el n-ésimo termino de la sucesión de Fibonacci. ¿Cuántas operaciones se realizan al llamar a cada una?

```
Función fibo1(n)
   Si n=0 Entonces
      Devolver 0
   Fin Si
   Si n=1 Entonces
      Devolver 1
   Fin Si
   Devolver fibo1(n-1) + fibo1(n-2)
Fin Función

Función fibo2(n)
   F0:= 0
   F1:= 1
   Para k = 2 Hasta n Hacer:
```

```
        F_k := F_{k-1} + F_{k-2}
    Fin Para
    Devolver F_n
Fin Función

Función pot_mat(n)
    Si n=0 Entonces
        Devolver (1 0; 0 1)
    Fin Si
    auxiliar:= pot_mat(⌊n/2⌋)
    Si n es par Entonces
        Devolver auxiliar × auxiliar
    Fin Si
    Devolver auxiliar × auxiliar × (1 1; 1 0)
Fin Función

Función fibo3(n)
    Si n=0 Entonces
        Devolver 0
    Fin Si
    auxiliar:= pot_mat(n-1)× (1; 0)
    Devolver auxiliar(1,1)
Fin Función
```

60. Consideremos el problema de calcular la cantidad de formas de distribuir k bolitas en n cajas en cuatro versiones:

- bolitas indistinguibles y cajas indistinguibles
- bolitas distinguibles y cajas distinguibles
- bolitas distinguibles y cajas indistinguibles
- bolitas indistinguibles y cajas distinguibles

Para dos de estos problemas podemos dar una fórmula cerrada como respuesta, ¿para cuáles? Para aquellos en los que no podemos dar una fórmula cerrada calcule la respuesta para $1 \leq k, n \leq 4$.

61. Consideremos el número de particiones enteras de n, esto es la cantidad de formas de escribir n como suma de enteros positivos (no importa el orden). ¿Cómo se relaciona esto con el ejercicio anterior? Por ejemplo 4 puede ser partido de cinco maneras distintas

4
$3 + 1$
$2 + 2$
$2 + 1 + 1$
$1 + 1 + 1 + 1$

Llamemos $f(n)$ al número de particiones enteras de n. Y llamemos $g(n, k)$ al número de particiones enteras de n que utilizan números menores o iguales a k. Pruebe que:

i) $f(n) = g(n, n)\, \forall n \in \mathbb{N}$
ii) $g(n, k) = g(n - k, k) + g(n, k - 1)\, \forall n, k \in \mathbb{N}$
iii) $g(n, 0) = 0\, \forall n \in \mathbb{N}$
iv) $g(0, k) = 1\, \forall k \in \mathbb{N}$
v) $g(n, k) = 0\, \forall n, k \in \mathbb{N}, n < 0$

Escriba un algoritmo *eficiente* en pseudocódigo para calcular $f(n)$.

∗ **62**. Dada una lista ordenada $(a(1), \dots, a(n))$ de n números reales, se la quiere ordenar de menor a mayor. Por ejemplo dada la lista $(4, 3, 5, 7, 2, 9, 1, 8)$ se quiere obtener la lista $(1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9)$ haciendo comparaciones entre elementos, preguntas de la forma "¿$a(i) < a(j)$?".

- **Burbujeo:** el algoritmo siguiente, llamado "burbujeo", compara el 1er elemento de la lista con el 2do intercambiándolos si es necesario, luego pasa al 2do y hace lo mismo con el siguiente, luego al 3ro etc. hasta recorrer todos los elementos de la lista (una pasada). En una pasada por todos los elementos de la lista, el elemento más grande quedará entonces a la derecha ¿Por qué? Luego repite el procedimiento desde el comienzo hasta no haber producido ningún cambio en una pasada. En ese punto la lista estará ordenada ¿Por qué?
  Por ejemplo la primera pasada del ejemplo de arriba da:

$$\underline{4}\ \underline{3}\ 5\ 7\ 2\ 9\ 1\ 8 \to 3\ \underline{4}\ \underline{5}\ 7\ 2\ 9\ 1\ 8 \to 3\ 4\ \underline{5}\ \underline{7}\ 2\ 9\ 1\ 8 \to$$
$$3\ 4\ 5\ \underline{7}\ \underline{2}\ 9\ 1\ 8 \to 3\ 4\ 5\ 2\ \underline{7}\ \underline{9}\ 1\ 8 \to 3\ 4\ 5\ 2\ 7\ \underline{9}\ \underline{1}\ 8 \to$$
$$3\ 4\ 5\ 2\ 7\ 1\ \underline{9}\ \underline{8} \to 3\ 4\ 5\ 2\ 7\ 1\ 8\ 9$$

  i) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de esa lista? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar esa lista?
  ii) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de una lista de n elementos? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar una lista de n elementos?

- **Mergesort:** Funciona en 3 etapas usando el mecanismo de "dividir y conquistar". Por simplicidad lo vamos a aplicar aquí para listas de longitud 2^n:
  i) "Divide": divide la lista en dos sublistas de tamaño 2^{n-1}.
  ii) "Conquista": ordena cada sublista por separado (utilizando el mismo algoritmo para listas de tamaño 2^{n-1}).
  iii) "Fusiona": fusiona en forma adecuada las dos sublistas en una sola.

  Ejemplo: Sea la lista $(4, 3, 5, 7, 2, 9, 1, 8)$ de longitud 2^3:
  i) "Divide": divide la lista en las dos sublistas $(4, 3, 5, 7)$ y $(2, 9, 1, 8)$ de longitud 2^2.
  ii) "Conquista": Aplica el algoritmo para estas dos sublistas (en forma recursiva, o sea partiendo cada una de ellas en dos sublistas de longitud 2) y termina obteniendo: $(4, 3, 5, 7) \to (3, 4, 5, 7)$ y $(2, 9, 1, 8) \to (1, 2, 8, 9)$.
  iii) "Fusiona": fusiona inteligentemente las dos sublistas, como lo hacemos naturalmente sin pensar: Se compara el primer elemento de cada sublista, se pone el más chico primero, luego se compara los dos primeros elementos que quedaron (sin ese) de cada lista, y se repite el procedimiento hasta agotar. Para fusionar $(3, 4, 5, 7)$ y $(1, 2, 8, 9)$ se obtiene

$\boxed{3}\ 4\ 5\ 7$	y	$\boxed{1}\ 2\ 8\ 9$	$\to$	$\boxed{1}$
$\boxed{3}\ 4\ 5\ 7$	y	$\cancel{1}\ \boxed{2}\ 8\ 9$	$\to$	$1\ \boxed{2}$
$\boxed{3}\ 4\ 5\ 7$	y	$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9$	$\to$	$1\ 2\ \boxed{3}$
$\cancel{3}\ \boxed{4}\ 5\ 7$	y	$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9$	$\to$	$1\ 2\ 3\ \boxed{4}$
$\cancel{3}\ \cancel{4}\ \boxed{5}\ 7$	y	$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9$	$\to$	$1\ 2\ 3\ 4\ \boxed{5}$
$\cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \boxed{7}$	y	$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9$	$\to$	$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \boxed{7}$
$\cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{7}$	y	$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9$	$\to$	$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ \boxed{8}$
$\cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{7}$	y	$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{8}\ \boxed{9}$	$\to$	$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ \boxed{9}$

  Escribir el algoritmo en pseudocódigo y en algún lenguaje funcional.
  ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar la lista original del ejemplo?
  Pruebe por inducción que el algoritmo requiere de no más que $2^k \times k$ comparaciones para ordenar 2^k elementos. En general se pueden ordenar n elementos en $O(n \log_2(n))$ comparaciones.

- Observe que *a priori* cuando nos dan n números (todos distintos) para ordenar, hay $n!$ posibles órdenes. A medida que vamos haciendo comparaciones entre los números reducimos la cantidad de posibles respuestas, el algoritmo termina cuando hemos reducido esta cantidad a uno.

Si en una cierta instancia tenemos un conjunto R de posibles respuestas, al hacer una comparación, esto es preguntar ¿$a(i) < a(j)$?, tenemos dos resultados posibles. Nos quedaremos con alguno de dos conjuntos, los órdenes de R donde $a(i) < a(j)$ o aquellos donde la desigualdad es la opuesta. De esta forma después de cada comparación podemos asegurarnos a lo sumo dividir en dos la cantidad posibilidades.

Por esto debemos hacer al menos k comparaciones de forma que $n!/2^k \leq 1$. Es decir debemos hacer al menos $\log_2(n!)$ comparaciones.

Se puede probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n!)}{n\log_2(n)} = 1$$

¿Qué nos dice esto?