FCEyN - UBA - 1er cuatrimestre 2016

Álgebra I
Práctica 2 - Combinatoria

<u>*Combinatoria*</u>

1. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántas formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

2. ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que *no* contienen al dígito 5?

3. ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que contienen al dígito 7?

4. Si A es un conjunto con n elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{P}(A)$?

5. María tiene una colección de n libros distintos que quiere guardar en 3 cajas: una roja, una amarilla y una azul. ¿De cuántas maneras distintas puede distribuir los libros en las cajas?

6. Un estudiante tiene que cursar *al menos* 2 de las 6 materias que se dictan este cuatrimestre. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

7. ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen dígitos consecutivos iguales? ¿Y si además el dígito de las decenas no es un 6?

8. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7?

9. 7 actores deben ordenarse en una fila para realizar el saludo al final de la obra. ¿De cuántas maneras distintas lo pueden hacer? Si el actor X debe ir sí o sí en el centro de la fila, ¿de cuántas maneras distintas pueden ordenarse los demás?

10. ¿Cuántos números de 7 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 7 de manera que la centena no sea el 2? ¿Y si además la unidad tampoco debe ser el 2?

11. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa circular?

12.
- i) Martín tiene pintura de 7 colores, va a pintar una mesa y una silla. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- ii) Charly tiene que ubicar 7 pares de medias iguales en 2 cajones, uno rojo y otro azul. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- iii) La nona tiene muchos caramelos, de naranja y de limón. Quiere regalarle uno a cada uno de sus 7 nietos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- iv) Beto tiene que decidir los resultados de un concurso, en el que participan 7 personas y hay premios para el primero y el segundo. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- v) Ana tiene 7 libros distintos y tiene que elegir 2 libros para llevárselos de viaje. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

¿Cuáles son las diferencias entre los 5 enunciados? ¿Se animan a generalizarlos?

13.
- i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?
- ii) ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?
- iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?
- iv) ¿Y si se pide que 1 ó 2 pertenezcan al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

14. Sea A un conjunto con 2016 elementos. Decidir si hay más subconjuntos de 206 elementos o de 1810 elementos. ¿Qué se puede decir en general?

15. De una caja que contiene 122 bolillas numeradas de 1 a 122 se extraen cinco bolillas. ¿Cuántos resultados posibles hay si

i) las bolillas se extraen una a la vez y se descartan después de extraerlas?
ii) las bolillas se extraen una a la vez y se devuelven a la caja después de extraerlas?
iii) las bolillas se extraen todas juntas?

16. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

17. Probar que $\binom{2n}{n}$ es par y que:

$$2^n \leq \binom{2n}{n} < 4^n \; \forall n \geq 1.$$

18. ¿Cuántas palabras (anagramas) se pueden formar usando todas las letras de:

i) MURCIÉLAGO?
ii) ELEMENTOS?
iii) COMBINATORIO?

19. ¿Cuántos anagramas de BIBLIOTECARIA pueden formarse

i) con la condición de que todas las vocales estén juntas?
ii) con la condición de que la T esté a la derecha de la C?
iii) con la condición de que la T esté a la derecha de la C y la C a la derecha de la R?
iv) con la condición de que las dos A estén juntas?

20. ¿Cuántas palabras de seis letras se pueden formar con las letras de REPELER?

21. Se tienen n cajas numeradas de 1 a n.

i) ¿De cuántas formas se pueden distribuir k bolitas indistinguibles entre sí en las cajas?
ii) ¿De cuántas formas se pueden distribuir k bolitas numeradas de 1 a k en las cajas?

22. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 22 bolitas indistinguibles en 9 cajas numeradas con la condición de que:

i) ninguna caja debe quedar vacía?
ii) la quinta caja debe quedar vacía?
iii) la tercera caja debe quedar vacía y la sexta debe contener exactamente 3 bolitas?
iv) queden exactamente dos cajas vacías?
v) queden a lo sumo tres cajas vacías?
vi) queden por lo menos cuatro cajas vacías?
vii) la primera caja debe contener exactamente 4 bolitas, la tercera debe contener por lo menos 5 bolitas y la última caja debe contener a lo sumo una bolita?

23. Se extraen 23 bolitas de una caja que contiene 100 bolitas blancas, 100 bolitas azules, 100 bolitas negras y 100 bolitas rojas. ¿Cuántos resultados posibles hay?

Combinatoria de conjuntos, relaciones y funciones

24. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿Cuántas relaciones de A en B hay? ¿Y de B en A?

25. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son antisimétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

26. Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la forma

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \iff a - d = c - b.$$

Probar que es una relación de equivalencia. Para cada $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, hallar la cantidad de elementos en su clase de equivalencia.

27. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ en la forma

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describir la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 3, 5\}$.

ii) ¿Cuántos elementos tiene la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 3, 5\}$?

iii) ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A = \{1, 3, 5\}$?

28. Sea $X = \{1, 2, \dots, 20\}$. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A - B = \emptyset$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

ii) ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ cumplen que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,\mathcal{R}\,B$?

iii) ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A = 6$ y $A\,\mathcal{R}\,\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

29. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 2016\}$. Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ dada por

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \#(A \triangle B) \leq 3.$$

Decidir si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica, o transitiva. Para $A = \{4, 8, 15, 16, 23, 42\}$ hallar la cantidad de $B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A\mathcal{R}B$.

30. Sea A el conjunto formado por las 2016-tuplas $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{2016})$ de ceros y unos cuyos elementos suman 17. Definimos la relación $\mathcal{R}$ en A dada por

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{2016}y_{2016} = 0.$$

Decidir si la relación $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. Para cada elemento $x \in A$ hallar la cantidad de elementos $y \in A$ tales que $x\mathcal{R}y$.

31. i) Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

ii) Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

32. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

i) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{F}$?

ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} :\ 10 \notin \mathrm{Im}(f)\}$?

iii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} :\ 10 \in \mathrm{Im}(f)\}$?

iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} :\ f(1) \in \{2, 4, 6\}\,\}$?

33. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay tales que $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$?

34. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par?

iii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?

35. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$ hay?

36. Sea $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tal que f es una función inyectiva$\}$.

Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$.
¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?