Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2015

Práctica 1
Medida abstracta

1. Sea μ una medida definida sobre Ω y $\{E_k\}_k$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Entonces, para todo conjunto arbitrario $A \subseteq \Omega$, se tiene:
$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap E_k) + \mu\Big(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big).$$

2. Sea $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de medidas en Ω. Para cada $A \subseteq \Omega$, definimos $\nu(A)$ como
$$\nu(A) = \sup_{\alpha \in I} \mu_\alpha(A).$$
Probar que ν es una medida definida en Ω.

3. Sea μ una medida en Ω y $A \subseteq \Omega$ un conjunto arbitario. Probar:

   (a) Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots$, son todos conjuntos medibles, entonces
   $$\mu\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap E_n).$$

   (b) Si $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$, son todos conjuntos medibles y además $\mu(A \cap E_k) < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces
   $$\mu\Big(A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap E_n).$$

4. Sea μ una medida regular en Ω. Probar:

   (a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ son subconjuntos arbitarios de Ω, entonces
   $$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

   (b) El resultado anterior es falso para intersecciones, aún si se tiene que $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Sea μ una medida en Ω. Probar que si se construye la medida λ por el método I, a partir de la premedida $(\Gamma, \mathcal{C})$, donde $\Gamma = \mu$ y $\mathcal{C} = \mathbb{P}(\Omega)$, entonces $\lambda = \mu$.

6. Sea μ una medida en Ω, $B \subseteq \Omega$ un conjunto arbitario y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de Ω. Entonces:

   (a) $\mu(B \cap A_*) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(B \cap A_n)$.

   (b) Si $\mu\big(B \cap \bigcup_{k\geq n} A_k\big) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces
   $$\limsup_{n\to\infty} \mu(B \cap A_n) \leq \mu(B \cap A^*).$$

   Recordar que
   $$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k \qquad \text{y} \qquad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

7. Dada una medida μ en Ω y un conjunto $A \subseteq \Omega$, se define μ_A como
   $$\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \qquad \forall B \subseteq \Omega.$$
   Probar que μ_A es una medida en Ω.

8. Sean μ una medida en Ω y $A \subseteq \Omega$. Probar que si E es un subconjunto μ-medible de Ω, entonces E es μ_A-medible. Es decir, $M_\mu \subseteq M_{\mu_A}$.

9. Sea (X, d) un espacio métrico y μ una medida boreliana en X. Dados $B \in \beta(X)$ y $\varepsilon > 0$, se tiene:

   (a) Si $\mu(B) < \infty$, entonces existe un conjunto F cerrado contenido en B, tal que $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$.

   (b) Si $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, con G_n abierto y de medida finita para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe G abierto, tal que $G \supseteq B$ y $\mu(G \setminus B) < \varepsilon$.

   (c) Si μ es borel regular, entonces los items (a) y (b) valen para B conjunto μ-medible.

10. Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}(a, b)$ denota el rectángulo definido como
    $$\mathcal{R}(a, b) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, \text{para } i = 1 \ldots n\}$$
    Sea $\mathfrak{R}$, la clase de todos los rectángulos definidos anteriormente y Γ la premedida sobre la clase $\mathfrak{R}$ que verifica $\Gamma(\mathcal{R}(a, b)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

    Probar que si $\lambda = MI(\Gamma, \mathfrak{R})$ y $\nu = MII(\Gamma, \mathfrak{R})$, entonces $\lambda = \nu$.

    Sugerencia: Para probar que $\lambda \geq \nu$, suponer primero que $\lambda(E) < \infty$ y, dado $\varepsilon > 0$, tomar un cubrimiento de modo tal que se verifique $\sum_k \Gamma(\mathcal{R}_k) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. Para armar un δ-cubrimiento, partir cada $\mathcal{R}_k$ en rectangulitos de tamaño adecuado y agrandarlos en $\eta/2^k$ para que el nuevo cubrimiento contenga el borde.

11. Probar que toda función de conjuntos μ definida en Ω construida usando el Método I es una medida.

12. Sea μ una medida en Ω. Probar que la medida λ en Ω obtenida aplicando el Método I usando como pre-medida $\tau = \mu$ con dominio en todos los subconjuntos de Ω, coincide con μ.

13. Sea λ una medida en Ω. Suponer que λ es regular y $\lambda(\Omega) < +\infty$. Probar que $E \in M_\lambda$ si y sólo si $\lambda(\Omega) = \lambda(E) + \lambda(\Omega \setminus E)$.

14. Sea ν una medida σ-aditiva en la σ-álgebra $\mathcal{A}$. Decimos qie $\mathcal{A}$ es completa respecto de ν, si $\mathcal{A}$ satisface que: Si $N \in \mathcal{A}$ y $\nu(N) = 0$, entonces $A \in \mathcal{A}$, para todo $A \subset N$.

    Probar que cada medida σ-aditiva en la σ-álgebra $\mathcal{A}$ puede ser extendida a una medida $\overline{\nu}$ en una σ-álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ tal que $\overline{\mathcal{A}}$ es completa con respecto a $\overline{\nu}$.

    Hint: Considerar la clase

    $$\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset \Omega : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B, \text{y } \nu(B \setminus A) = 0\}.$$

    Probar que $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra que contiene $\mathcal{A}$, y definir para $E \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\overline{\nu}(E) = \nu(B)$, donde $A \subset E \subset B$ y $\nu(B \setminus A) = 0$, $A, B \in \mathcal{A}$.

    Notar que si μ es una medida en Ω, entonces $\mathcal{M}_\mu$ es completa respecto a ν (la restricción de μ a la σ-álgebra $\mathcal{M}_\mu$).

15. Usando el Ejercicio 14, mostrar que $\mathcal{M}_\mu = \overline{\mathcal{M}}_\mu$.

16. Si μ es una medida en Ω que no es regular, entonces existe un conjunto $A \subset \Omega$ tal que

    $$\mu(A) < +\infty \quad \text{y} \quad \mu(A) < \text{ínf}\{\mu(E) : E \supset A, E \in \mathcal{M}_\mu\}.$$

17. *a*) Construir un ejemplo de una familia de medidas en un conjunto Ω tal que el ínfimo de la familia no sea una medida.

    b) Si $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de medidas en Ω, entonces existe una medida μ en Ω tal que

    1) $\mu(A) \leq \inf_\alpha \mu_\alpha(A) \quad \forall\, A \subset \Omega$.

    2) If ν es una medida en Ω tal que

    $$\nu(A) \leq \inf_\alpha \mu_\alpha(A) \quad \forall\, A \subset \Omega, \quad \text{entonces} \quad \nu \leq \mu.$$

c) Concluir a partir de lo anterior que el conjunto de medidas en Ω es un reticulado completo con el orden parcial dado por $\mu \preccurlyeq \nu$ if $\mu(A) \leq \nu(A) \ \ \forall A \subset \Omega$.

Recordad que un *reticulado completo* es un conjunto parcialmente ordenado donde cada subconjunto tiene un ínfimo y un supremo.