Práctica 5

1. Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f \, d\alpha$ y en los casos afirmativos calcularla.

   (a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

   (b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; sea $c \in (a,b)$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

   ¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en un entorno de c?

   (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

   (d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a,b] = [-1,3]$.

   (e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Supongamos que $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f. ¿Qué puede decir sobre la función α? *Sugerencia.* Para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.

3. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define $s_\pi := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

   Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple las condiciones:

   (a) $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

   (b) $\lim_{m\to\infty} \| \pi_m \| = 0$.

   (c) $\lim_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f \, d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

   (d) Si $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

   Si ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum_{k=1}^{n} g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\ d\beta$.

4. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \le g(x)$, entonces $\int\limits_a^b f\ d\alpha \le \int\limits_a^b g\ d\alpha$.

5. Para cada $x \in \mathbb{R}$ vamos a notar con $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x, es decir: $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \le x\}$.

   Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

   (a) $\int\limits_0^4 x^2\ d(\lfloor x \rfloor)$ (b) $\int\limits_0^2 x\ d(x - \lfloor x \rfloor)$ (c) $\int\limits_0^2 x^2\ d(|x|)$

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a,b]$ se define

$$\pi(f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

   si $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

   Demostrar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a,b]$, entonces $\pi_1(f) \le \pi_2(f)$.