

Práctica 3

1. Una función $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una norma en \mathbb{R}^n si se cumple que:

- $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, \dots, 0)$.
- $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sean $\| (x_1, \dots, x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ y $\| (x_1, \dots, x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

2. Una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una distancia en \mathbb{R}^n si se cumple:

- $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.
- $d(v, w) = d(w, v)$, para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.
- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$, para todo $v, w, u \in \mathbb{R}^n$.

Demostrar que si N es una norma en \mathbb{R}^n , entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en \mathbb{R}^n .

3. Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los siguientes conjuntos :

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$ (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$
- (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy > z\}$

4. Sean S, T subconjuntos de \mathbb{R}^n . Demostrar las propiedades siguientes:

- a) $(S^\circ)^\circ = S$.
- b) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.
- c) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
- d) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
- e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
- f) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
- g) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

5. En cada uno de los siguientes casos hallar S° , \bar{S} y ∂S .
- (a) $S = [0, 1]$ (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$
- (d) $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ (e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$
6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.
- a) Demostrar que S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S .
- b) Demostrar que S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.
7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.
8. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S .
- a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.
- b) Un punto $p \in S$ se llama un punto aislado de S si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\bar{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.
9. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}), \text{ con } n, m \in \mathbb{N}\}$. Hallar la adherencia \bar{S} .
10. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} que son a la vez abiertos y cerrados.
11. Probar que todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. ¿Es cierta la recíproca?
12. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea A el conjunto de sus puntos límites.
- a) Probar que A es compacto.
- b) Probar que el máximo y el mínimo de A son $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, respectivamente.
13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $\mathfrak{I}_n := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$. Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{I}_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} \mathfrak{I}_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?
14. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S .
15. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?
16. Sea $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, n)\| < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.
17. Sea $S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} / n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ (cf. ejercicio 4 (f) de la Práctica 1). Demostrar que los puntos de acumulación de S son los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ y el 0. ¿El conjunto $S \cup \{0\}$ es compacto?