

Nombre y apellido..... Número de libreta.....

Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

Entrego ejercicios 1 2 3 4

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota

Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.

1. (30 puntos) Consideremos X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria con la densidad de X_i siendo

$$f_X(x) = \frac{3x^2}{2\theta^3} I_{(-\theta, \theta)}(x), \quad \theta > 0.$$

- (a) (6 puntos) Hallar $\hat{\theta}_{MO}$ estimador de momentos de θ .
- (b) (6 puntos) ¿Es consistente $\hat{\theta}_{MO}$?
- (c) (4 puntos) Probar que $\max_{1 \leq i \leq n} |X_i|$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ .
- (d) (7 puntos) ¿Es consistente $\hat{\theta}_{MV}$?
- (e) (7 puntos) ¿Es insesgado $\hat{\theta}_{MV}$? Asintóticamente insesgado?

2. (20 puntos) Consideremos X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria continua tal que

$$f_X(x) = \frac{6}{\theta^6} x^5 I_{[0, \theta]}(x), \quad \theta > 0.$$

- (a) (13 puntos) Determine un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para θ basado en toda la muestra. (Sugerencia, calcular la distribución de $T = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)/\theta$).
- (b) (7 puntos) A partir de lo anterior, determine un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para $E(X_1^2)$ basado en toda la muestra.

3. (25 puntos) La ciudad de Munich (“München”), del Estado Libre de Baviera (“Bayern”) es internacionalmente conocida por su producción de *leberwurst*, un embutido tradicional alemán confeccionado a partir de un puré de hígado. Se sabe que el porcentaje óptimo de carne de hígado que debe tener un embutido debe no ser mayor al 15%, o de lo contrario el producto tendría un sabor demasiado intenso para ser apreciado y además podría ser perjudicial para la salud. El porcentaje promedio que se utiliza en los embutidos producidos por las diversas firmas de la ciudad es controlado por un organismo de control municipal. Dicho organismo sospecha que una cierta empresa productora de *leberwurst* está utilizando en promedio demasiada carne de hígado en sus embutidos, por encima del límite tolerable, y para eso decide llevar a cabo un test de hipótesis. Presentar una denuncia contra la empresa de forma injustificada puede tener costosas repercusiones legales, por lo tanto el organismo desea asegurar que la probabilidad de incriminar a la empresa cuando la misma cumple con los estándares especificados debería ser de 0.04. Se sabe, por registros históricos, que es razonable suponer que el porcentaje de hígado en cada embutido producido por la empresa sigue una distribución normal con desvío estándar de 2 y media μ , lo que quiere examinar el organismo de control. Se obtiene una muestra de 25 embutidos y se observa un porcentaje promedio de 15.6.

- (a) (4 puntos) Plantear las hipótesis adecuadas para el problema.
 - (b) (5 puntos) Construir el test. Es decir, definir el estadístico del test, su distribución bajo la hipótesis nula y la región de rechazo.
 - (c) (3 puntos) En función de la muestra observada, ¿cuál es el dictamen del organismo de control?
 - (d) (5 puntos) Calcular el p-valor.
 - (e) (5 puntos) Suponiendo que $\mu = 15.1$, ¿cuál es la probabilidad de que el organismo le conceda el visto bueno a la empresa pese a estar incumpliendo los estándares de calidad?
 - (f) (3 puntos) Suponga ahora n libre, halle un valor de n que asegure que la probabilidad del inciso anterior sea a lo sumo 0.05.
4. (25 puntos) Una fábrica de renombre produce lamparitas para iluminación de interiores. Existen dos tipos de lamparitas, las que hacen uso de un filamento incandescente (tipo A) cuya duración es una distribución exponencial con una duración media de 5 meses, y por otro lado las halógenas (tipo B), que si bien son más caras tienen una duración media mayor. Su duración es una variable aleatoria continua con distribución desconocida pero con media de 10 meses y un desvío estándar de 1 mes. El novedoso esquema de comercialización de la planta implica que cuando un cliente compra una lamparita, el 20% de las veces se le ofrece una lamparita de filamento incandescente y el 80% restante es de tipo halógena. La duración de una lamparita determinada es independiente de la de cualquier otra lamparita.
- (a) (13 puntos) Un cliente desea mantener constantemente iluminado un cuarto de escobas, para eso compra un paquete de 20 lamparitas. Cuando se quema una lamparita, es inmediatamente reemplazada por otra. Acotar inferiormente de forma no trivial (es decir, por un valor $\gamma > 0$) la probabilidad **exacta** de que pueda mantener iluminado el cuarto por una cantidad de al menos 150 meses y a lo sumo 210 meses.
 - (b) (12 puntos) Se quiere asegurar de que el promedio de las duraciones sea menor a 9,1 meses tenga una probabilidad **aproximada** de al menos 0.99, ¿cuántas lámparas debería comprar para esto?