Optimización

Primer Cuatrimestre 2015

Trabajo Práctico N° 2: Superficies Mínimas.

El objetivo de este trabajo es aplicar métodos de descenso a la resolución de distintos problemas de superficies mínimas. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, el área de la superficie dada por el gráfico de u es:

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \tag{1}$$

En general, el problema de superficies mínimas consiste en buscar la superficie u que minimice $A(u)$ dados valores de contorno de u en $\partial\Omega$. Es decir, para una $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ dada:

$$\begin{aligned} &\min A(u) \\ \text{s.a:} \quad & u = g \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Catenoide

Un ejemplo simple de superficie mínima está dado por la *catenoide*. El problema de la catenoide puede formularse del siguiente modo: dados dos círculos de radios R_0 y R_1 ubicados uno encima del otro a alturas z_0 y z_1, con sus centros ubicados sobre un mismo eje, la catenoide es la mínima superficie que une los bordes de estos círculos. Si una estructura formada por dos círculos de alambre es sumergida en agua jabonosa, esta formará una membrana adherida a ambos círculos: la catenoide es la superficie que adopta naturalmente esta membrana. La catenoide resulta ser la superficie de revolución de la curva catenaria, de ahí su nombre. La catenaria es la curva que describe la forma que adopta una cuerda (o cadena) fijada en sus extremos, bajo la acción uniforme de la gravedad.

La simplicidad del problema de la catenoide radica en su simetría, que permite reducir la formulación a una única variable. En efecto, si se corta la superficie con un plano horizontal a altura z se obtendrá un círculo de radio $r(z)$. Si el planteo (2) se escribe, para este problema, en coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \min A(r) = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2} dz \\ \text{s.a:} \quad r(z_0) = R_0, \; r(z_1) = R_1. \end{aligned}$$

Para resolver este problema se propone la siguiente estrategia:

- Realizar una discretización del intervalo: $[z_0, z_1]$,

$$z_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = z_1.$$

- Asumir que r es continua y lineal a trozos en los intervalos $[t_i, t_{i+1}]$. Esto autoriza a:
- Realizar una discretización de r, $r_i \sim r(t_i)$. De este modo, $r_0 = R_0$ y $r_{n+1} = R_1$ dados, y r_i con $1 \leq i \leq n$ serán las variables del problema.
- Utilizar algún método de descenso para minimizar $A(r_1, \ldots, r_n)$, definido sobre la variable discretizada.

Ejercicio 1 Asumiendo una discretización homogénea de $[z_0, z_1]$, tal que $t_{i+1} - t_i = h$, calcular analíticamente el funcional A en función de $(r_1, \ldots, r_n)$.

Ejercicio 2 Implementar un programa que reciba como datos: z_0, z_1, r_0, r_1 y el número de variables de la discretización n y calcule el funcional A.

Ejercicio 3 Implementar programas que minimicen $\widetilde{A}$ utilizando:

a) El método del gradiente;

b) El método de Newton;

c) El método de Tangentes Paralelas.

En cada caso graficar la superficie resultante. Para graficar, debe tenerse en cuenta que el problema está formulado en coordenadas cilíndricas. Estudiar las comandos `meshgrid`, `mesh` y `surf` de Matlab.

Probar los programa con $z_0 = 0, z_1 = 1, r_0 = r_1 = 1$, e ir experimentando con variaciones en r_j y en z_1. ¿Qué sucede cuando z_1 es demasiado grande?¿Por qué?

Para el caso $z_0 = 0, z_1 = 1, r_0 = r_1 = 1$ realizar un gráfico comparando la velocidad de convergencia de los distintos métodos.

Graficando r en función de t se obtiene una aproximación de la catenaria.

Superficies mínimas

En esta sección proponemos resolver problemas de superficies mínimas que se ajusten a la formulación usual (2), siendo $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. De este modo:

$$A(u) = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy.$$

Para ello discretizaremos:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1 \\ 0 &= y_0 < y_1 < \cdots < y_m < y_{m+1} = 1, \end{aligned}$$

siendo $x_{i+1} - x_i = h_x$, $y_{j+1} - y_j = h_y$ constantes. De acuerdo con esta notación, la versión discretizada de u será $u_i^j \sim u(x_i, y_j)$. Asumiremos que $u_0^j, u_{n+1}^j, u_i^0, u_i^{m+1}$ vienen dados por las condiciones de contorno, de modo que las variables serán u_i^j para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Para poder interpolar u con funciones lineales consideraremos una malla triangular en donde cada celda rectangular se divide en dos triángulos, con nodos: $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1})$

y $(x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1})$ respectivamente. De este modo, asumiremos que u es lineal en cada triángulo.

Las condiciones de contorno vendrán dadas por cuatro funciones continuas: $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ $k = 1, 2, 3, 4$. g_k corresponderá al lado ℓ_k de Ω, donde $\ell_1 = \{(1,t) : \ 0 \leq t \leq 1\}$, y los demás se numeran en sentido antihorario. Las funciones g_k deberán pegarse continuamente en los vértices de Ω.

Ejercicio 4 Implementar un programa que reciba como input los parámetros n y m de la malla y las funciones g_k, $k = 1, 2, 3, 4$, y calcule el valor del funcional A discretizado.

Ejercicio 5 Implementar un programa que minimice A utilizando el método de Tangentes Paralelas y grafique el resultado.

Problema del Obstáculo

El problema del obstáculo consiste en resolver (2) agregando restricciones de la forma:

$$u(x, y) \geq \varphi(x, y),$$

donde $\varphi(x, y)$ representa un objeto que la superficie u no puede atravesar.

Resolveremos el caso sencillo en que las restricciones adicionales son lineales. En particular, consideraremos el caso en que $\varphi = \alpha \chi_{\Omega_0}$ para algún $\Omega_0 \subset \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6 Implementar un algoritmo que resuelva el problema del obstáculo utilizando el método del gradiente proyectado y grafique la solución.

Considerar los datos: $\Omega_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\alpha = 0.8$ y

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = t, \quad g_3(t) = 1 - t, \quad g_4(t) = 1 - t.$$