

OPTIMIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2015

Práctica N° 0: Repaso.

Repaso de Álgebra Lineal

Ejercicio 1 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que la aplicación $\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle v, w \rangle = v^t A w$ define un producto interno si y sólo si A es simétrica y definida positiva.

Ejercicio 2 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva. Probar que si λ es autovalor de A entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$.

Ejercicio 3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva. v_1 y v_2 autovectores de A correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente. Probar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces v_1 y v_2 son ortogonales con el producto interno usual.

Ejercicio 4 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que A es simétrica si y sólo si $O^t A O$ es simétrica para toda $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal.

Ejercicio 5 Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

Ejercicio 6 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva, y sea $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ la submatriz con coeficientes (a_{ij}) para $1 \leq i, j \leq k$. Probar que A_k es simétrica definida positiva ($k = 1, 2, \dots, n$). Concluir que $\det(A_k) > 0$ para todo k . Los valores $\det(A_k)$ se llaman *menores principales* de A .

Repaso de Análisis

Ejercicio 7 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$ b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$

Ejercicio 8 Sea $f(x, y) = xe^y$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$. Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0.98, 0.02)$. Estimar el error cometido.

Ejercicio 9 Calcular los puntos críticos de $f(x, y) = xe^{-y^2} + x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^4$ y $h(x, y) = x^4 - y^4$ y sus hessianos en dichos puntos. ¿Son máximos, mínimos o puntos silla?

Ejercicio 10 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

Ejercicio 11 Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = xy(x - y)^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

b) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \mathbb{R}^2$.

c) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$

Ejercicio 12 La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

Repaso Cálculo Numérico

Ejercicio 13 Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar:

- a) n es $O(n)$
- b) $3n^2 + 7n + 4$ es $O(n^2)$
- c) n^i es $O(n^j)$ si $i < j$

Ejercicio 14 Mostrar que $n!$ no es $O(r^n)$, cualquiera sea el entero positivo r . Concluir que una complejidad de $O(n!)$ es “peor” que una complejidad exponencial de cualquier base.

Ejercicio 15 Escribir algoritmos para realizar suma, resta y multiplicación de matrices. Determinar la complejidad y expresarla en función de la dimensión de las matrices.

Ejercicio 16 Escribir un programa para calcular la descomposición de Cholesky de una matriz simétrica y definida positiva.

Ejercicio 17 Escribir un programa que resuelva sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya matriz asociada sea simétrica y definida positiva, usando el programa del ejercicio anterior.

Ejercicio 18 Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 , $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ el vector de puntos equiespaciados tales que $x_0 = a$, $x_n = b$, e $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ el vector con $y_i = f(x_i)$. Escribir un programa que devuelvan un vector z tal que $z_i \sim f'(x_i)$, donde la aproximación se realiza usando el método de diferencias finitas, tomando como datos los vectores x e y y el tipo (*backward*, *forward* y *centradas*).

Ejercicio 19 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^2 tal que se anula solamente una vez en el intervalo. Escribir el algoritmo de Newton para aproximar la raíz de f . Usar alguna variante de diferencias finitas del ejercicio anterior para estimar los valores de f' .

Ejercicio 20 Escribir un algoritmo para el siguiente problema de Cuadrados Mínimos: Dados puntos distintos en el plano $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, hallar el polinomio $p \in \mathcal{P}_k$ que mejor aproxime estos datos en el sentido de cuadrados mínimos; es decir que minimice la expresión: $\sum_{i=1}^n |y_i - p(x_i)|^2$