Scores generales: El test de Wilcoxon se basa en los rangos de los valores absolutos de las observaciones. Generalizaremos el test, utilizando no los rangos sino funciones de los rangos de los valores absolutos, denominadas **scores.**

Definición: Sea 0 = a(0) ≤ a(1) ≤ .... ≤ a(n) una sucesión y definamos

$$V = \sum_{j=1}^{n} a(R_j) s(X_j) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\, s(X_{D_j}) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\, W_j$$

donde R_j es el rango de $|X_j|$ entre los valores absolutos $|X_1|,...,|X_n|$. Entonces *V* se denomina estadístico de rangos signados con scores a(i).

- si a(i) = 1 para i=1,...,n se obtiene *V=S*
- si a(i) = i para i=1,...,n se obtiene $V=T^+$.

Propiedad: Sean $X_1,..., X_n$ v.a. i.i.d., $X_i \sim F(x), F \in \Omega_s$, $V_1 = \sum a(R_j)s(X_j) = \sum a(j)W_j$ y $V_2 = \sum b(R_j)s(X_j) = \sum b(j)W_j$, entonces

$$E(V_1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a(j) \qquad Var(V_1) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} [a(j)]^2 \qquad \operatorname{cov}(V_1, V_2) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} a(j)\, b(j)$$

Luego, si

$$\lim_{n} \frac{\max\ \{a(j), j = 1,...n\}}{\left(\sum [a(j)]^2\right)^{1/2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_1 - E(V_1)}{\left(Var(V_1)\right)^{1/2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Muchas veces los scores vienen dados por lo que se denomina una **función generadora de scores.**

Definición: Sea ψ(u), 0 < u < 1, una función no decreciente y no negativa. Supongamos además que

$$\int_0^1 \psi(u)du < \infty \qquad \text{y} \qquad 0 < \int_0^1 \psi^2(u)du < \infty$$

Si $a(i) = \psi\left(\frac{i}{n+1}\right)$, definimos el estadístico generado por la función generadora de scores ψ, como:

$$\overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\frac{R_j}{n+1}\right)s(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\frac{j}{n+1}\right)W_j.$$

Observemos que ψ(u) = 1 produce $\overline{S} = S/n$ y ψ(u)=u produce $\overline{T} = \frac{T^+}{n(n+1)}$.

Teorema: Si $\overline{V}$ está generado por ψ, entonces

$$E(\overline{V}) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\frac{j}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(u)du$$

$$n\,\mathrm{Var}(\overline{V}) = \frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{n}\psi^2\left(\frac{j}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}\int_0^1 \psi^2(u)du$$

$$\frac{\overline{V} - E(\overline{V})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{V})}} \quad \text{y} \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{V} - \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(u)du}{\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^1 \psi^2(u)du}}$$

tienen distribución asintótica normal estándar.

Este teorema muestra que, para una gran cantidad de posibles tests, podemos usar la aproximación Normal.

Bickel (1974) provee una aproximación de Edgeworth para el estadístico de scores generales. Bajo condiciones de regularidad,

$$P\left(\frac{\overline{V} - E(\overline{V})}{\sqrt{Var(\overline{V})}} \le t\right) \cong \Phi(t) + \frac{\int_0^1 \psi^4(u)du}{12\,n\left(\int_0^1 \psi^2(u)du\right)^2}(t^3 - 3t)\,\varphi(t)$$

donde φ es la función de densidad normal estándar.

Tolerancia asintótica: Se puede probar que τ_n(aceptación) $\cong \varepsilon$, donde ε es tal que

$$\int_0^{1-\varepsilon} \psi(u)du = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(u)du$$

y que τ_n(rechazo) $\cong \delta$, donde δ es tal que

$$\int_{1-\delta}^{1} \psi(u)du = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(u)du$$

En casos típicos, $\delta = \varepsilon$ y esta tolerancia asintótica es igual al punto de ruptura de un estimador derivado de un test de rangos (Huber, 1981).

Algunos ejemplos de funciones de scores:

1) Scores normales:

Sea $\Phi_+(x) = P(|Z| \le x) = 2\Phi(x) - 1$, siendo Φ la función de distribución Normal estándar. Definimos

$$\psi(u) = \Phi_+^{-1}(u) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u\right)$$

El estadístico correspondiente se denomina estadístico de scores normales y fue propuesto por Fraser (1957):

$$\overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{R_j}{n+1}\right) s(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_j s(X_j)$$

Observemos que, como $R_j > 0$, $A_j > 0$ para todo j. En el ejercicio 11 de la Práctica 3 probarán que en efecto Ψ(u) es una función generadora de scores y por lo tanto $\overline{V}$ es asintóticamente normal. Por lo tanto, para testear

H_0: $\theta = 0$ vs H_1: $\theta > 0$

se rechaza H_0 a nivel asintótico α si

$$\overline{V} > \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} A_j + z_\alpha \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{n} A_j^2}$$

2) Rangos signados winsorizados:

Se define Ψ(u)=min(u,1-γ), para 0 < u < 1. El correspondiente estadístico $\overline{V}$ asigna su rango dividido por *(n+1)* al (1-γ) 100% de las observaciones con menores valores absolutos y (1-γ) veces su signo al γ 100% de las observaciones con mayores valores absolutos. Por lo tanto es una mezcla de scores de Wilcoxon y scores del signo.

Como $\int_0^1 \psi(u)du = \frac{1}{2}(1-\gamma^2)$ y $\int_0^1 \psi^2(u)du = \frac{1}{3}(1-\gamma)^2(1+2\gamma)$, entonces

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{V}-(1-\gamma^2)/4}{\sqrt{(1-\gamma)^2(1+2\gamma)/12}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Para elegir un test más eficiente se puede usar información previa sobre la cola de la distribución. Algo parecido a la Normal, sugiere γ cerca de 0, y algo cerca de la doble exponencial sugiere γ cercano a 1. La winsorización óptima para la distribución de Cauchy se logra con γ igual a 0.75.

3) Signos modificados: Se define

$$\psi(u)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad 0<u\le 1-\gamma \\ 1 & \text{si} \quad 1-\gamma<u<1\end{cases}$$

En este caso,

$$\overline{V}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\frac{R_j}{n+1}\right)s(X_j)=\frac{1}{n}\sum_{j=[(1-\gamma)(n+1)]+1}^{n}W_j\ .$$

Es decir que

$$V=n\overline{V}=\#\{\text{observ. positivas tales que el rango de sus valores absolutos es} > (1-\gamma)(n+1)\}$$

Si γ = 1, $n\overline{V}=S.$

Como $n\overline{V}=V$ es suma de binomiales independientes, bajo H_o

$$V \sim Bi\left(n-[(1-\gamma)(n+1)], 1/2\right)$$

y por lo tanto es fácil obtener los valores críticos. Eligiendo γ adecuadamente es posible mejorar la eficiencia respecto del test del signo.

Estimadores puntuales derivados: Consideremos el estadístico general

$$V = \sum_{j=1}^{n} a(R_j)\, s(X_j) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\, W_j$$

y la función

$$V(\theta) = \sum_{j=1}^{n} a(R_j(\theta))\, s(X_j - \theta)$$

donde $R_j(\theta)$ es el rango de $|X_j - \theta|$ entre los valores absolutos $|X_1 - \theta|, \ldots, |X_n - \theta|$. LLamando, como siempre, $X^{(1)} \leq \ldots \leq X^{(n)}$, a los estadísticos de orden, Bauer (1972) demostró el siguiente Teorema.

Teorema: Como función de θ, $V(\theta)$ es una función escalera, no creciente, tal que
a) $V(\theta)$ decrece una cantidad $a(1)$ en cada $X^{(i)}$
b) $V(\theta)$ decrece una cantidad $a(j-i+1)-a(j-i)$ en cada $(X^{(i)} + X^{(j)})/2$ $(i < j)$

Dem: Hettmansperger, pag. 94.

Definiendo

$$T_{ij}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{X^{(i)} + X^{(j)}}{2} > \theta \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

se puede deducir la siguiente forma equivalente de $V(\theta)$

$$V(\theta) = \sum_{i \leq j}\sum (a_{j-i+1} - a_{j-i}) T_{ij}(\theta)$$

Además, bajo H_o: θ = 0, F ∈ Ω_s, $V(\theta)$ es simétrica alrededor de $\sum a_i / 2$, entonces el estimador de Hodges-Lehmann será el valor $\hat{\theta}$ tal que $V(\hat{\theta}) = \sum a_i / 2$.

Eficiencia de scores generales: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución F(x-θ), F ∈ Ω_s, con densidad f tal que su número de información de Fisher es finito, o sea

$$I(f) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log[f(x-\theta)]\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'(x)]^2}{f(x)}\, dx < \infty$$

y sea Ψ una función generadora de scores. La eficacia del test correspondiente a Ψ es:

$$c = \frac{2\int_0^{\infty} \psi'(2F(x)-1)\, f^2(x)dx}{\left[\frac{1}{4}\int_0^1 \psi^2(u)du\right]^{1/2}}$$

Recordemos que $1/c^2$ es la varianza asintótica del correspondiente estimador.

Puede probarse la siguiente forma alternativa de la eficacia, que no requiere del cálculo de la derivada de Ψ:

$$c = \frac{\int_0^1 \psi(u)\, \psi_f(u)du}{\left[\int_0^1 \psi^2(u)du\right]^{1/2}}$$

donde

$$\psi_f(u) = -\frac{f'\left(F^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right)} \qquad (1)$$

<u>Ejemplo:</u> Consideremos la función de scores que genera el estadístico de rangos signados winsorizados, $\Psi(u)=\min(u,1-\gamma)$, para $0 < u < 1$. Entonces $\Psi'(u)=1$ si $0 < u \leq 1 - \gamma$ y 0 en caso contrario, por lo tanto

$$\psi'(2F(x)-1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < 2F(x)-1 \leq 1-\gamma \\ 0 & \text{si} \quad 1-\gamma < 2F(x)-1 < 1 \end{cases}$$

Llamando $x_\alpha=F^{-1}(\alpha)$ al percentil α de la distribución F,

$$\psi'(2F(x)-1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq x_{1-\gamma/2} \\ 0 & \text{si} \quad x_{1-\gamma/2} < x < \infty \end{cases}$$

y se obtiene la siguiente expresión para la eficacia:

$$c = \frac{\sqrt{12}\int_{x_{\gamma/2}}^{x_{1-\gamma/2}} f^2(x)dx}{\sqrt{(1-\gamma)^2(1+2\gamma)}}$$

La eficiencia del test de rangos signados winsorizados de Wilcoxon en relación al test de Wilcoxon ordinario, es

$$e = \frac{\left[\int_{x_{\gamma/2}}^{x_{1-\gamma/2}} f^2(x)dx\right]^2}{(1-\gamma)^2(1+2\gamma)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx\right]^2}$$

La tabla que sigue da valores de la eficiencia para distintos valores de γ y para las distribuciones Normal, doble exponencial y Cauchy.

Distribución	**γ**						
	0.10	**0.20**	**0.50**	**0.70**	**0.80**	**0.90**	**0.98**
Normal	0.99	0.94	0.92	0.81	0.75	0.70	0.66
DE	1.01	1.03	1.13	1.20	1.25	1.29	1.33
Cauchy	1.03	1.09	1.34	1.43	1.44	1.40	1.35

La winsorización óptima para la distribución de Cauchy se obtiene con $\gamma = 0.75$ y no $\gamma = 1$ como hubiésemos esperado por tratarse de una distribución con colas pesadas.

Teorema: Sea $X_1, ..., X_n$ una m.a. de una distribución $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_s$, con densidad f tal que $I(f) < \infty$, sea ψ una función generadora de scores y ψ_f definida en (1), entonces

$$c \le c_f = \sqrt{I(f)}$$

donde c_f es la eficacia del test basado en la función de scores ψ_f. [Esta función es una función generadora de scores si $F \in \Omega_s$ y $-\log(f(x))$ es convexa (fuertemente unimodal)]

O sea que el test basado en ψ_f es óptimo en el sentido de la eficiencia asintótica.

Observaciones: 1) Se puede probar que, bajo normalidad, el test óptimo es el test basado en scores normales. Su eficiencia respecto al test de t es 1, y por lo tanto es completamente eficiente en el sentido de la eficiencia de Pitman. Es más, se ha probado que, si la distribución es simétrica, la eficiencia del test de scores normales nunca es menor que 1 respecto al test t.
2) A medida que las colas de la distribución son más pesadas, se deben usar procedimientos que den menos peso a los valores extremos, como por ejemplo test de Wilcoxon, de rangos winsorizados o de scores normales. Si las colas son muy pesadas también el test de signo es apropiado.