

Antes de estudiar la distribución del estadístico bajo la alternativa, obtendremos el estimador puntual y el intervalo de confianza asociados, estudiaremos las propiedades de consistencia y tolerancia del test.

**Estimadores puntuales e intervalos de confianza basados en el Test de Wilcoxon:** Recordemos que, en el caso del test del signo, a partir del gráfico de la función  $S(\theta) = \#\{i / X_i > \theta\}$ , que es una función escalera no creciente con saltos en los estadísticos de orden, se podían deducir el estimador de Hodges-Lehmann de  $\theta$  y el correspondiente intervalo de confianza.

Deduciremos una forma análoga a  $S$  del estadístico del test de rangos signados de Wilcoxon, la que nos permitirá construir el estimador de Hodges-Lehmann y el intervalo de confianza asociados.

Definición: Dada una m.a.  $X_1, \dots, X_n$ , se definen los  $n(n+1)/2$  promedios de Walsh como

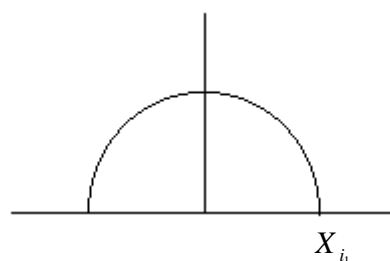
$$\frac{X_i + X_j}{2} \quad \forall i \leq j$$

Teorema: El estadístico del test de rangos signados de Wilcoxon  $T^+$  puede escribirse en la forma

$$T^+ = \#\left\{ \frac{X_i + X_j}{2} > 0, 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$$

es decir que  $T^+$  es el número de promedios de Walsh positivos.

Demostración: Sean  $X_{i_1}, \dots, X_{i_p}$  los  $p$  elementos positivos de la muestra, entonces  $T^+$  es la suma de los rangos de los valores absolutos de esos elementos. Dibujemos un círculo de centro 0 y radio  $X_{i_1}$ ,



El rango correspondiente a  $X_{i_1}$  es igual al número de elementos de la muestra dentro del círculo, incluyendo a  $X_{i_1}$ . Cada promedio formado por un punto del círculo y  $X_{i_1}$  es positivo y por lo tanto el rango correspondiente a  $X_{i_1}$  es el número de promedios de Walsh positivos formado por él y los elementos de la muestra que son en valor absoluto menores o iguales que él.

Repetiendo este procedimiento para  $i_2, \dots, i_p$ , resulta que la suma de los rangos es igual al número de promedios de Walsh positivos.

Consideremos ahora

$$T^+(\theta) = \#\left\{ \frac{X_i + X_j}{2} > \theta, 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$$

Esta función verifica

$T^+(\theta)$  es una función no creciente de  $\theta$ .

$T^+(\theta)$  es una función escalera con saltos en los promedios de Walsh.

La distribución de  $T^+$  bajo  $H_0$  es simétrica.

Entonces, el estimador de Hodges-Lehmann de  $\theta$  es

$$\hat{\theta} = \text{med}_{i \leq j} \left\{ \frac{X_i + X_j}{2} \right\}$$

o sea es la mediana de los promedios de Walsh.

Además, si  $V^{(1)} \leq \dots \leq V^{(N)}$  son los  $N = n(n+1)/2$  promedios de Walsh ordenados y  $a$  es tal que  $P(T^+ \leq a) = P(T^+ \geq N - a) = \alpha/2$ , entonces

$$[V^{(a+1)}, V^{(N-a)}]$$

es un intervalo de confianza de nivel  $1 - \alpha$  para  $\theta$ , basado en  $T^+$ .

Si  $n$  es suficientemente grande,  $a$  puede obtenerse a partir de la aproximación Normal con corrección por continuidad, como

$$a \cong \frac{n(n+1)}{4} - 0.5 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

Teorema: Si  $F \in \Omega_s$ , la distribución de  $\hat{\theta}$  es simétrica alrededor de  $\theta$ .

Demostración: Recordemos que el estimador de Hodges-Lehmann es invariante por traslaciones, entonces podemos suponer  $\theta = 0$ .

Sean  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  y  $-\vec{X} = (-X_1, \dots, -X_n)$ . Como  $F \in \Omega_s$ ,  $\vec{X}$  y  $-\vec{X}$  tienen la misma distribución y por lo tanto  $\hat{\theta}(\vec{X})$  y  $\hat{\theta}(-\vec{X})$  tienen la misma distribución.

$$\text{Pero } \hat{\theta}(-\vec{X}) = \text{med} \left( \frac{-X_i - X_j}{2} \right) = -\text{med} \left( \frac{X_i + X_j}{2} \right) = -\hat{\theta}(\vec{X})$$

entonces,  $\hat{\theta}$  y  $-\hat{\theta}$  tienen la misma distribución y por lo tanto la distribución de  $\hat{\theta}$  es simétrica alrededor de 0.

**Ejemplo:** Rosenzweig et al (1972) describen un experimento para estudiar los efectos del ambiente o entorno en la anatomía del cerebro. Tres ratas machos de cada una de 12 camadas fueron asignadas al azar a una caja standard de laboratorio, a una caja enriquecida con variedad de juguetes o a una caja empobrecida en la cual las ratas vivían en aislamiento. Se tomaron mediciones del peso del cerebro y de la actividad enzimática. Nosotros consideraremos sólo las mediciones del peso del cerebro y compararemos los entornos empobrecido y enriquecido. Los datos son apareados: (X,Y) donde X es la medición correspondiente al entorno empobrecido e Y la del entorno enriquecido. La variable de interés es  $D = Y - X$ .

Bajo  $H_0$  (no hay diferencias en los efectos debidos al entorno), D tiene distribución simétrica alrededor de 0 y llamando  $\theta$  al centro de la distribución verdadera, se desea testear

$$H_0: \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta > 0$$

Las observaciones obtenidas son las siguientes:

Ambiente	Par											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Enriquecido	689	663	653	740	699	690	685	718	742	651	687	679
Empobrecido	657	646	642	650	698	621	647	689	652	661	612	678
Diferencia	32	17	11	90	1	69	38	29	90	-10	75	1

A nivel 0.01 se rechaza  $H_0$  si  $T^+ > 68$  (Tabla A12). Como el valor observado del estadístico es 75, se rechaza  $H_0$ .

Para obtener el estimador puntual y el intervalo de confianza, debemos calcular los 78 promedios de Walsh. Por ejemplo, usando R o S-PLUS, podríamos hacerlo mediante el siguiente conjunto de comandos:

```
prom<-rep(0,12*13/2)
k<-0
for (i in 1:12)
{
for (j in i:12)
{
k<-k+1
prom[k]<-(x[i]+x[j])/2
}
}
}
```

y los promedios de Walsh obtenidos son los siguientes:

```
prom
[1] 32.0 24.5 21.5 61.0 16.5 50.5 35.0 30.5 61.0 11.0 53.5 16.5 17.0 14.0
[15] 53.5 9.0 43.0 27.5 23.0 53.5 3.5 46.0 9.0 11.0 50.5 6.0 40.0 24.5
[29] 20.0 50.5 0.5 43.0 6.0 90.0 45.5 79.5 64.0 59.5 90.0 40.0 82.5 45.5
[43] 1.0 35.0 19.5 15.0 45.5 -4.5 38.0 1.0 69.0 53.5 49.0 79.5 29.5 72.0
[57] 35.0 38.0 33.5 64.0 14.0 56.5 19.5 29.0 59.5 9.5 52.0 15.0 90.0 40.0
[71] 82.5 45.5 -10.0 32.5 -4.5 75.0 38.0 1.0
```

La mediana de los promedios de Walsh es el estimador puntual de  $\theta$ :

median(prom)  
**36.5**

Es decir que el estimador de Hodges-Lehmann correspondiente al estadístico de Wilcoxon es  $\hat{\theta} = 36.5$ .

Para obtener el intervalo de confianza, debemos ordenar los promedios de Walsh:

prom.ord<-sort(prom)

```
prom.ord
[1] -10.0 -4.5 -4.5 0.5 1.0 1.0 1.0 3.5 6.0 6.0 9.0 9.0 9.5 11.0
[15] 11.0 14.0 14.0 15.0 15.0 16.5 16.5 17.0 19.5 19.5 20.0 21.5 23.0 24.5
[29] 24.5 27.5 29.0 29.5 30.5 32.0 32.5 33.5 35.0 35.0 35.0 38.0 38.0 38.0
[43] 40.0 40.0 40.0 43.0 43.0 45.5 45.5 45.5 45.5 46.0 49.0 50.5 50.5 50.5
[57] 52.0 53.5 53.5 53.5 53.5 56.5 59.5 59.5 61.0 61.0 64.0 64.0 69.0 72.0
[71] 75.0 79.5 79.5 82.5 82.5 90.0 90.0 90.0
```

y el intervalo de confianza de nivel 0.95 será

$$[V^{(15)}, V^{(64)}] = [11.0, 59.5]$$

Observación: Los ceros, es decir las diferencias iguales al valor a testear, se eliminan al aplicar el test de Wilcoxon pero no al estimar. Respecto a los empates, se les asigna el promedio de los rangos que les corresponderían si fuesen diferentes.

**Propiedades de estabilidad:** Se puede probar que para el test de Wilcoxon, las tolerancias de aceptación y de rechazo son

$$\tau_n(\text{aceptación}) = \frac{2n-1-\sqrt{1+8c_\alpha}}{2n}$$

$$\tau_n(\text{rechazo}) = \frac{2n-1-\sqrt{(2n+1)^2-8c_\alpha}}{2n}$$

con  $c_\alpha$  tal que  $P(T^+ \geq c_\alpha) = \alpha$ .

Usando para  $c_\alpha$  la aproximación normal, se observa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(\text{aceptación}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(\text{rechazo}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.29$$

Luego,  $T^+$  provee un test con tolerancia positiva, e intermedia entre un test altamente tolerante, el test del signo y un test "intolerante", el test t.

Observación: En el libro de Hettmansperger (pag. 41) se presenta un estudio general de la tolerancia para estimadores construidos a partir de ciertos promedios de Walsh (por ejemplo, la mediana muestral es la mediana de los promedios de Walsh con  $i = j$ ) y se demuestra en particular que la tolerancia del estimador de Hodges-Lehmann asociado al test de Wilcoxon

$$\hat{\theta} = \text{med}_{i \leq j} \left\{ \frac{X_i + X_j}{2} \right\}$$

está dada por

$$\tau_n = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \sqrt{2n^2 + 2n + 5}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.29$$

Como en el caso del test del signo, la tolerancia del test de Wilcoxon converge a la tolerancia asintótica del estimador de Hodges-Lehmann asociado.

Curva de influencia de  $\hat{\theta}$ : En el mismo capítulo, se deduce la curva de influencia del estimador de Hodges-Lehmann correspondiente al test de Wilcoxon

$$IC(y) = \frac{F(y) - 1/2}{\int f^2(u) du}$$

Por lo tanto, la curva de influencia es la distribución acumulada centrada y escalada y, por lo tanto es continua y acotada. Luego, el estimador es robusto.

Distribución asintótica de  $\hat{\theta}$ :

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

con

$$\sigma^2 = \frac{\int (F(y) - 1/2)^2 dF(y)}{\left( \int f^2(u) du \right)^2} = \frac{1}{12 \left( \int f^2(u) du \right)^2}$$

**Consistencia del test de Wilcoxon:** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. ,  $X_i \sim H(x)$  arbitraria y continua. Obtendremos  $E(T^+)$  y  $V(T^+)$  para mostrar la **consistencia** del test de Wilcoxon. Definamos

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X_1 > 0) \\ p_2 &= P(X_1 + X_2 > 0) \\ p_3 &= P(X_1 + X_2 > 0, X_1 > 0) \\ p_4 &= P(X_1 + X_2 > 0, X_1 + X_3 > 0) \end{aligned}$$

Bajo  $H_0$ ,  $p_1 = p_2 = 1/2$  y además se puede probar que  $p_3 = \frac{p_2 + p_1^2}{2}$ .

Teorema:

$$\begin{aligned} E(T^+) &= np_1 + \frac{n(n-1)}{2} p_2 \\ V(T^+) &= np_1(1-p_1) + \frac{n(n-1)}{2} p_2(1-p_2) + 2n(n-1)(p_3 - p_1p_2) + n(n-1)(n-2)(p_4 - p_2^2) \end{aligned}$$

Demostración: Se definen, para  $1 \leq i \leq j \leq n$ ,

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{X_i + X_j}{2} > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{X_i + X_j}{2} \leq 0 \end{cases}$$

Luego,

$$T^+ = \sum_{i \leq j} T_{ij}$$

$$E(T^+) = \sum_{i \leq j} E(T_{ij}) = \sum_{i=1}^n E(T_{ii}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(T_{ij}) = nE(T_{11}) + \frac{n(n-1)}{2} E(T_{12}) = np_1 + \frac{n(n-1)}{2} p_2$$

Además, desarrollando la expresión de la varianza

$$V(T^+) = V\left(\sum_{i=1}^n T_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} T_{ij}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^n V(T_{ii}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V(T_{ij}) + 2 \sum_{k < l} \text{cov}(T_{kk}, T_{ll}) + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (k,l)}} \sum_{k < l} \text{cov}(T_{ij}, T_{kl}) + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i < j} \text{cov}(T_{kk}, T_{ij})$$

se obtiene la expresión para la varianza enunciada.

Consideremos ahora,  $\bar{T} = \frac{T^+}{n(n+1)}$ , entonces

$$E(\bar{T}) = \frac{p_1}{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{n+1} \right) p_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{p_2}{2}$$

$$V(\bar{T}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Luego,

$$\bar{T} \xrightarrow{p} \mu(H) = \frac{p_2}{2} = \begin{cases} 1/4 & \text{si } \theta = 0, H \in \Omega_s \\ > 1/4 & \text{si } \theta > 0, H \in \Omega_s \end{cases}$$

y por lo tanto, dado que la distribución asintótica del estadístico bajo  $H_0$  es normal, el test de Wilcoxon es consistente para alternativas de corrimiento simétricas.

Se puede obtener la consistencia en una clase más amplia de alternativas, la de las funciones de distribución estocásticamente positivas ( $\Omega_p$ ),

$\Omega_p = \{H / H \text{ es absolutamente continua y } H(x) + H(-x) \leq 1 \ \forall x, \text{ con desigualdad estricta en algún subintervalo}\}$

¿Porqué se dice que H es estocásticamente positiva? Pues, si  $H \in \Omega_p$  y  $x > 0$ ,

$$P(X \geq x) = 1 - H(x) \geq H(-x) = P(X \leq -x)$$

Observemos que si una función de distribución pertenece a la clase de alternativas de corrimiento simétricas (con  $\theta > 0$ ) pertenece a  $\Omega_p$ .

Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $G(x)$  y sea  $\bar{T} = \frac{T^+}{n(n+1)}$ , entonces

$$\bar{T} \xrightarrow{p} \mu(G) = \frac{p_2}{2}$$

$$2 \mu(G) = p_2 = P(X_1 + X_2 > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)g(x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G(-x_2))g(x_2)dx_2$$

Si  $G \in \Omega_s$ , entonces  $p_2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_2)g(x_2)dx_2 = 1/2$

y si  $G \in \Omega_p$ ,  $1 - G(-x) > G(x)$  en algún subintervalo real, entonces  $p_2 > 1/2$ . Luego

$$\bar{T} \xrightarrow{p} \mu(G) = \frac{p_2}{2} = \begin{cases} 1/4 & \text{si } G \in \Omega_s \\ > 1/4 & \text{si } G \in \Omega_p \end{cases}$$

y el test de Wilcoxon es consistente en  $\Omega_p$ .

**Observación:** Si un tratamiento altera la simetría de la distribución pero deja la mediana en 0, podríamos obtener una distribución estocásticamente positiva, entonces,  $T^+$  va a tender a caer en la región de rechazo y a rechazar  $H_0: \theta = 0$ . Es por eso que es importante especificar claramente las hipótesis a testear ya que en este caso el test de Wilcoxon actuaría como un test de simetría, si la posición es fija.

**Distribución de  $T^+$  bajo la alternativa:** Bajo la alternativa,  $T^+$  deja de ser combinación lineal de v.a. independientes y por lo tanto no podemos aplicar directamente el TCL. Para obtener la distribución límite se proyecta  $T^+$  sobre la clase de v.a. independientes y se aplica el TCL a la proyección. Finalmente se prueba que la diferencia entre  $T^+$  y la proyección tiende a 0 en probabilidad. Todos los teoremas relacionados con la distribución bajo  $H_1$  se enunciarán pero no se demostrarán.

Veamos mediante un ejemplo que bajo la alternativa no se cumple la independencia.

**Ejemplo:** Sea  $X_1, X_2$  una m.a. de tamaño 2 de una distribución  $U(-1,2)$ , entonces la muestra proviene de una distribución  $F(x-\theta)$ , con  $\theta > 0$ ,  $F \in \Omega_s$ .

$T^+ = W_1 + 2 W_2$ , con

$$W_i = s(X_{D_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{D_i} > 0 \\ 0 & \text{si } X_{D_i} \leq 0 \end{cases}$$

Si llamamos  $Y_1 = X^{(1)}$ ,  $Y_2 = X^{(2)}$ , entonces

$$W_1 = 0 \wedge W_2 = 1 \Leftrightarrow -1 < Y_1 < 0 < -Y_1 < Y_2 < 2$$

$$\begin{aligned} P(W_1 = 0, W_2 = 1) &= \int_{-1}^0 \int_{-y_1}^2 \frac{1}{9} dy_2 dy_1 = \frac{2}{9} \int_{-1}^0 \int_{-y_1}^2 dy_2 dy_1 = \frac{2}{9} \int_{-1}^0 (2 + y_1) dy_1 = \\ &= \frac{2}{9} \left( 2y_1 + \frac{y_1^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{9} \left( -2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Del mismo modo, se puede verificar que

$$P(W_1 = 0, W_2 = 0) = \frac{1}{9}$$

$$P(W_1 = 1, W_2 = 0) = \frac{1}{9}$$

$$P(W_1 = 1, W_2 = 1) = \frac{4}{9}$$

y las probabilidades marginales son

$$P(W_1 = 0) = \frac{4}{9} \quad P(W_1 = 1) = \frac{5}{9} \quad P(W_2 = 0) = \frac{2}{9} \quad P(W_2 = 1) = \frac{7}{9}$$



Entonces,

$$P(W_1 = 0, W_2 = 1) = \frac{1}{3} \neq \frac{4}{9} = P(W_1 = 0) P(W_2 = 1)$$

y por lo tanto  $W_1$  y  $W_2$  no son independientes.

Para tratar el tema de la distribución de  $T^+$  en general, se utiliza el método de proyección que está discutido ampliamente en un paper de Hajek (Ann. Math. Stat., 1968).

Teorema (Proyección): Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución arbitraria  $H(x)$  y sea  $V = V(X_1, \dots, X_n)$  una v.a. tal que  $E(V) = 0$ . Si consideramos v.a. de la forma

$$W = \sum_{i=1}^n g_i(X_i)$$

entonces  $E(V-W)^2$  se minimiza eligiendo

$$\hat{g}_i(x) = E(V / X_i = x)$$

La v.a.  $V_p = \sum_{i=1}^n \hat{g}_i(X_i)$  se denomina proyección de  $V$  y  $E(V-V_p)^2 = \text{Var}(V) - \text{Var}(V_p)$ .

Demostración: Hettmansperger, pag 51.

Ejemplo: Usando el teorema de proyección, se puede mostrar que, considerando la varianza muestral  $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ , y llamando  $V = S^2 - \sigma^2$ , de manera que tenga esperanza 0, la proyección de  $V$  es

$$V_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [ (X_i - \mu)^2 - \sigma^2 ]$$

que es un promedio de v.a. independientes e idénticamente distribuidas. De aquí se puede deducir, usando el TCL y si  $E(X^4) < \infty$ , que  $n^{1/2} V_p$  tiene distribución asintótica Normal. La importancia del teorema de proyección está en el hecho de que se puede demostrar que  $n^{1/2} V_p$  y  $n^{1/2} (S^2 - \sigma^2)$  tienen la misma distribución límite. Para ello se requiere del siguiente resultado:

Teorema: Si  $W_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$  y  $E(U_n - W_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , entonces  $U_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ .

Demostración: Hettmansperger, pag.53.

Ejemplo: Volviendo al ejemplo de la varianza muestral, como la distribución límite de  $n^{1/2} V_p$  es  $N(0, \mu_4 - \sigma^4)$ , siendo  $\mu_4 = E(X - \mu)^4$  y como  $E(n^{1/2} V_p - n^{1/2} S^2)^2 \rightarrow 0$ , entonces, se prueba  $n^{1/2} (S^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$ ,

Como mencionamos, los dos teoremas anteriores permiten obtener la distribución asintótica de  $T^+$ . En primer lugar, se prueba que la proyección de  $T^+$  está dada por

$$V_p = (n-1) \sum_{i=1}^n [1 - H(-X_i) - p_2] + \sum_{k=1}^n (T_{kk} - p_1)$$

cuya distribución asintótica es

$$n^{-3/2} V_p \xrightarrow{d} N(0, p_4 - p_2^2).$$

Finalmente, se verifica que

$$E(n^{-3/2} (V_p - T^+)) \rightarrow 0,$$

entonces

$$n^{-3/2} (T^+ - E(T^+)) \xrightarrow{d} N(0, p_4 - p_2^2).$$

Estos resultados se pueden resumir en el siguiente Teorema.

Teorema: Si  $H(x)$  es una función de distribución continua arbitraria tal que  $0 < H(0) < 1$ , entonces

$$\frac{T^+ - E(T^+)}{\sqrt{\text{Var}(T^+)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Observación: La restricción  $0 < H(0) < 1$  significa que necesitamos que 0 esté en el soporte de la distribución. Esto es para evitar que la distribución sea degenerada, ya que si no lo estuviese significaría que  $T^+ = n(n+1)/2$  con probabilidad 1.

Compararemos ahora el test del Wilcoxon con el test del signo y el test de t. La eficacia del test de Wilcoxon está dada por

$$c_w = \sqrt{12} \int f^2(x) dx$$

si  $F \in \Omega_s$  con densidad  $f$  y, recordemos que las eficacias del test del signo y del test t son:

$$c_s = 2f(0)$$

$$c_t = \frac{1}{\left(\int x^2 f(x) dx\right)^{1/2}}$$

Entonces, las eficiencias relativas son:

$$e(S, T^+) = \frac{f^2(0)}{3 \left( \int f^2(x) dx \right)^2}$$

$$e(S, t) = 4 \left( \int x^2 f(x) dx \right) f^2(0)$$

$$e(T^+, t) = 12 \left( \int x^2 f(x) dx \right) \left( \int f^2(x) dx \right)^2$$

Por ejemplo, si  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ,  $\sigma_f^2 = \int x^2 f(x) dx = 1$  y  $\int f^2(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ ,

entonces

$$e(S, T^+) = 2/3 = 0.667 \quad e(S, t) = 2/\pi = 0.637 \quad e(T^+, t) = 3/\pi = 0.955$$

Supongamos que nuestra muestra proviene de una mezcla de normales, es decir que  $X_1, \dots, X_n$  es una m.a. de una distribución F, tal que

$$F(x) = (1 - \varepsilon) \Phi(x) + \varepsilon \Phi(x/3)$$

es decir que la distribución F es una mezcla de  $N(0,1)$  y  $N(0,9)$ . Este modelo se denomina Normal contaminado y es muy difícil de distinguir de un modelo normal para valores moderados de  $\varepsilon$ .

Se puede verificar que la eficiencia del test de Wilcoxon relativa al test de t para este modelo es

$$e(T^+, t) = \frac{3(1+8\varepsilon)}{\pi} \left[ (1-\varepsilon)^2 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{\sqrt{5}} \right]^2$$

En la siguiente tabla se presentan valores de la eficiencia para algunos valores de  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$	0	0.01	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
$e(T^+, t)$	0.955	1.009	1.108	1.196	1.301	1.373	1.497

O sea que, si bien, bajo el modelo Normal perdemos al usar Wilcoxon, para un porcentaje moderado de contaminación el test de Wilcoxon es más eficiente que el test de t.

También se puede probar que si la distribución tiene colas pesadas, como por ejemplo la distribución de Cauchy o la doble exponencial, el test de signo es más eficiente que el test de Wilcoxon o el test de t.

Nos preguntamos si existe una distribución para la cual el test de t sea netamente superior al de Wilcoxon. La respuesta es No como lo muestra un teorema debido a Hodges y Lehmann (1956)

**Teorema:** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a de  $F(x-\theta)$ ,  $F \in \Omega_s$ , entonces

$$\inf_{\Omega_s} e(T^+, t) = 0.864$$

**Test para tendencias:** Así como derivamos un test para tendencias a partir del test del signo, podemos hacerlo a partir del test de Wilcoxon. Para ello, supongamos que las observaciones son  $(M_i, X_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_n$ . Por ejemplo, podríamos suponer que  $X_i$  es la respuesta a la dosis  $M_i$ . Queremos testear, por ejemplo:

$H_0$ : no existe tendencia      vs       $H_1$ : existe tendencia positiva

Como antes, formamos los pares  $(X_j, X_{j+N})$ , siendo  $N=[n/2]$ . En el test del signo, analizábamos los signos de  $D_i = X_{i+N} - X_i$ . Ahora, además de su signo, tendremos en cuenta el tamaño de las diferencias y, para que sean comparables, consideraremos

$$Z_j = \frac{X_{j+N} - X_j}{M_{j+N} - M_j}$$

Como en el caso del test del signo, testaremos si el parámetro de posición de los  $Z_j$  es 0 vs la alternativa de que es positivo.

**Test para correlación:** Si deseamos testear hipótesis sobre la correlación entre dos v.a., como en el caso del test del signo, se ordenan las observaciones según una de las variables ( $M_i$ ) y se testea la presencia de tendencia en la otra ( $X_i$ ).

**Ejemplo:** En el ejercicio 8 de la práctica 3, se pide que se testee, a nivel 0.05, si hay correlación positiva entre las reacciones a dos drogas. Los datos, ordenados según las reacciones a la droga 1 son los siguientes:

Paciente	Droga 1	Droga 2
2	-1.6	0.8
4	-1.2	0.1
3	-0.2	1.1
5	-0.1	-0.1
9	0	4.6
1	0.7	1.9
8	0.8	1.6
10	2.0	3.4
6	3.4	4.4
7	3.7	5.5

que pueden ser considerados como observaciones de la forma  $(M_i, X_i)$  con  $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{10}$ . Se forman las diferencias standarizadas

$$Z_j = \frac{X_{j+5} - X_j}{M_{j+5} - M_j} \quad 1 \leq j \leq 5$$

y se testea  $H_0: \theta = 0$  vs  $H_1: \theta > 0$  siendo  $\theta$  el parámetro de posición de los  $Z_i$ 's.