

## Matemática 4 - Análisis Matemático 3

EXAMEN FINAL - 26/2/2015

Nombre y Apellido: .....

Carrera: ..... Libreta Universitaria: .....

1	2	3	4	Nota

1. i) Enuncie y demuestre el teorema que relaciona la existencia de la derivada de una función de variable compleja, con las ecuaciones de Cauchy-Riemann.  
 ii) Pruebe que si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, y su parte real es constante (en todo  $\mathbb{C}$ ), entonces  $f$  es constante.

2. i) Utilice integrales de variable compleja para probar que la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

es

$$\widehat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

- ii) Utilice las propiedades de la transformada, para deducir cuánto valen las transformadas de Fourier de las siguientes funciones  $g$  y  $h$ ,

$$g(x) = \frac{1}{a^2 + (x-b)^2} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad h(x) = e^{-|x|}$$

3. Utilizar la transformada de Fourier para encontrar una solución explícita de la siguiente ecuación diferencial para la función  $u = u(x, y)$ ,

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

(problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un semiplano) donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable dada. Obtener una fórmula integral de la forma

$$u(x, y) = (P_y * f)(x)$$

donde  $P_y$  es un núcleo (conocido como el núcleo de Poisson) y  $*$  denota la convolución de funciones.

**Sugerencia:** El resultado del ejercicio anterior puede ayudar.

4. i) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $2\pi$  periódica de la clase  $C^1$ . Demuestre que se verifica la siguiente desigualdad

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - I|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \quad \text{donde } I = \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

expresando ambos miembros de dicha desigualdad en términos de los coeficientes de Fourier de  $f$ , y comparando los resultados.

- ii) ¿Para qué funciones se verifica la igualdad en esta desigualdad?

**IMPORTANTE:** Debe justificar todas sus respuestas.