Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 6

Espacios vectoriales con producto interno

1. Determinar si las siguientes funciones definen un producto interno sobre el espacio correspondiente. En caso afirmativo, hallar su matriz en la base canónica de dicho espacio.

   (i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$.

   (ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$.

   (iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_2$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

   (iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1 + i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + (1 + i)x_1\bar{y}_2$.

   (v) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_3\bar{y}_3 - x_1\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_1$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

2. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

   a) $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $\Phi(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f'(1)g'(1)$.
   b) $\langle\, ,\rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K$, $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
   c) $\langle\, ,\rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R}$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$
   d) $\langle\, ,\rangle : K^n \times K^n \to K$, $\langle x, y\rangle = x\, Q^*Q\, \overline{y}^t$, donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

3. *(i)* Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ es

   $$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3$$

   un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

   (ii) Determinar para qué valores de $c \in \mathbb{R}$ es

   $$\Phi(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3cx_1y_3 + 3cx_3y_1$$

   un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

4. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en el K-espacio vectorial V para el cual la base $\mathcal{B}$ resulte ortonormal.

   (i) $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, -1)\}$, $K = \mathbb{R}$.

   (ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, i), (-1, i)\}$, $K = \mathbb{C}$.

   (iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $K = \mathbb{R}$.

   (iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$, $K = \mathbb{C}$.

   (v) $V = \mathbb{R}_3[X]$ y $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$, $K = \mathbb{R}$.

   (vi) $V = \mathbb{R}_2[X]$ y $\mathcal{B} = \{1, X - 1, (X - 1)^2\}$, $K = \mathbb{R}$.

5. *(i)* Sea $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el producto interno definido por

   $$\Phi_1(x, y) = x_1y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2.$$

   Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ_1.

(*ii*) Sea $\Phi_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ el producto interno definido por

$$\Phi_2(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2y_2.$$

Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el Φ_2.

6. Sea $\langle , \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ el producto interno en $\mathbb{R}_n[X]$ dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Calcular la matriz de $\langle , \rangle$ en la base $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$.

7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes $\mathbb{R}$-subespacios.

(*i*) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_2 = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto interno usual.

(*ii*) $S_2 = \langle(1, 2, 1)\rangle$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto interno

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

(*iii*) $S_3 = \langle(i, 1, 1), (-1, 0, i)\rangle$ en $\mathbb{C}^3$, con el producto interno usual.

(*iv*) $S_4 = \langle X^2, X^4 + X^2 + 1\rangle$ en $\mathbb{R}_4[X]$, con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(*v*) $S_5 = \langle e^x + x\rangle$ en $\langle x, x^2, e^x\rangle \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \tfrac{1}{2}f(1)g(1) + f(\tfrac{1}{2})g(\tfrac{1}{2}).$$

8. Hallar bases ortonormales para los complementos ortogonales calculados en ejercicio anterior.

9. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual y sea

$$S = \langle(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$ y calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S.

10. (*i*) Considerar $\mathbb{C}^{3\times3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

(*ii*) Considerar $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\langle 1, X, X^2, X^3\rangle$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1\rangle$.

(*iii*) Considerar $\mathcal{C}[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$. Sea $S = \langle 1, \cos(x), \sin(x)\rangle$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt la base $\{1, \cos(x), \sin(x)\}$. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

11. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Probar que f es una rotación. Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

---

14. **(Ejercicio tipo parcial)** Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y sea $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1) + f'(1)g'(1)$$

a) Probar que ϕ es un producto interno.

b) Sea $S \subset V$ definido por $S =< 1, x, x^2 >$, hallar B base ortonormal de S para el producto interno ϕ.

c) Calcular $d(x^3, S)$ según el producto interno ϕ. ¿Cuanto vale $d(2x^3 - 6x^2, S)$?