Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 5

Forma de Jordan

1. Considere la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (*i*) ¿Cuál es el rango de A?

   (*ii*) Calcule el polinomio característico de A. ¿Es esta matriz nilpotente? ¿Puede responder esta pregunta solamente conociendo el polinomio característico?

   (*iii*) Sabiendo el rango de la matriz, ¿cuáles son las posibilidades de la forma de Jordan de A?

   (*iv*) Hallar una base en la que A este en forma de Jordan.

2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \leq j \\ 1 & i > j \end{cases}$$

3. (*i*) Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotente de grado de nilpotencia 3. Determinar las posibles formas de Jordan de A.

   (*ii*) Sea $B \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\chi_B(\lambda) = \lambda^8$ y $rg(B) = 6$. ¿Cuál es la forma de Jordan de B?

4. Considere la matriz $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (*i*) Calcule el rango y el grado de nilpotencia de A.

   (*ii*) Determine la forma de Jordan de A.

   (*iii*) Halle una base en la que A esté en forma de Jordan.

5. *a*) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

   b) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Notación. *Si* $A \in K^{n\times n}$ *entonces* $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$.

6. Sea $S \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $S = \langle e^x, xe^x, x^2e^x\rangle$ y sea $D : S \to S$ la transformación lineal $D(f) = f'$.

   (i) Muestre que $D - I$ es nilpotente.

   (ii) Halle una base de Jordan para $D - I$ y concluya una base de Jordan para D.

   (iii) Calcule (matricialmente) e^{tD}.

   (iv) Calcule $e^{tD}v$, donde v es alguno de los vectores generadores de S; por ejemplo, $v = x^2e^x$. (Observar que si e^{tD} lo calculó en términos matriciales, para calcular $e^{tD}v$ hay que escribir las coordenadas de v en la base donde considero la matriz de D).

   (v) Escriba $(x + t)^2e^{t+x}$ como combinación lineal de la base (con coeficientes que dependen de t). Compare con el item anterior.

7. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (i) Muestre que $N = A - 2I$ es nilpotente.

   (ii) Halle una base de Jordan de N, y luego de A.

   (iii) Calcule e^{tA} (*Sugerencia: Utilice la formula* $e^{D+N} = e^De^N$, *si* D *y* N *conmutan*).

8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (i) Calcule el polinomio característico de A.

   (ii) Conociendo χ_A, ¿qué dimensión puede tener $Nu(A - 3I)$? ¿qué dimensión puede tener $Nu(A - 2I)$?

   (iii) Muestre que $Nu(A - 2I)^2$ es un subespacio A-estable y que está en suma directa con el subespacio de autovalor 3. Calcule e^{At}.

9. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

   $a)$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^4 = 10 \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 I)^4 = 9, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 12, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^3 = 11. & \end{array}$$

    Hallar su forma de Jordan.

11. Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A-invariantes para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 & = \alpha,\ a_1 = \beta \\ a_{n+2} & = 4.a_{n+1} - 4.a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

13. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

---

14. **(Ejercicio tipo parcial)** Consideremos $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, hallar la forma y base de Jordan de A.
