Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 4

Autovalores y Diagonalización

1. (*i*) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(iv)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (v)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \qquad (vi)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vii)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad (viii)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (ix)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En todos los casos, $a \in K$.

(*ii*) Para cada matriz A del inciso anterior, decidir si A es diagonalizable sobre K, para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$. En caso afirmativo, exhibir una matriz $C \in K^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = CDC^{-1}$.

2. Determinar cuáles matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in K$, y $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, son diagonalizables.

3. (*i*) Sea $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\binom{1+i}{2-i}$ es un autovector correspondiente al autovalor $1+3i$. Mostrar que A es diagonalizable, encontrar una base de autovectores y determinar A.

(*ii*) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\binom{1}{-1}$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que χ_A es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Determinar si A es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?

4. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 6, 0)$ y $u = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A.

a) Probar que A es diagonalizable.

b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t.

5. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

6. (*i*) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable, tal que $\mathrm{tr}A = -4$ y los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8. Calcular los autovalores de A.

   (*ii*) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ con $\det A = 6$, que tiene a 1 y a -2 como autovalores, y tal que $A - 3I$ tiene a -4 como autovalor. Determinar los restantes autovalores de A.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

   a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.

   b) Probar que A **no** es diagonalizable.

   c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A.

   d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de χ_A. Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\mathrm{tr}(B)$.

9. Sea $A \in K^{n\times n}$.

   (*i*) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

   (*ii*) Probar que si A es inversible entonces 0 no es autovalor de A, y si x es un autovector de A entonces x es un autovector de A^{-1}.

10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z).$$

   (*i*) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

   (*ii*) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (*iii*) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Sea $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal $D(f) = f'$. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de D asociado al autovalor λ. Concluir que D tiene infinitos autovalores.

12. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector (es decir, $f^2 = f$) con $\dim(Im(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular χ_f.

13. Usando el teorema de Hamilton-Cayley,

   (*i*) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (*ii*) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (*iii*) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I.

14. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Probar que:

   a) $A^4 = 7A^3 - 17A^2 + 5A + 6I$.

   b) $A^5 - 6A^4 = -10A^3 - 12A^2 + 11A + 6I$.

15. Dada $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

16. Considerar la sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por $a_0 = a_1 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

   (i) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

   (ii) Mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

   (iii) Encontrar una matriz inversible P tal que $P.A.P^{-1}$ sea diagonal.

   (iv) Hallar la fórmula general para el término a_n.

17. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones (es decir, encontrar una fórmula general para los términos x_n e y_n en función de x_0 e y_0).

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

   Sugerencia: use las ideas del ejercicio anterior.

18. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

   con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

19. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = \langle e^x, e^{-x}\rangle$.

   Sugerencia: Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$.

20. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de χ_f es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

21. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V y matrices $A_1 \in K^{s\times s}$ y $A_2 \in K^{t\times t}$ tales que

$$|f|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

   Probar que, en este caso, $\chi_f = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$.

22. (i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

(*ii*) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es $[f_\theta]_{EE} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Probar que para todo $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

(*iii*) Considerar $f_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. ¿Es diagonalizable? Hallar todos los subespacios f_θ-invariantes.

23. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(*i*) Probar que el subespacio $\langle (2,-1,0,0), (-1,2,-1,0) \rangle$ es f_A-invariante.

(*ii*) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $|f_A|_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix}$.

24. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$ f_A-invariantes y tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

25. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$.

(*i*) Hallar, para cada $0 \leq j \leq 5$, un subespacio S_j de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_j) = j$ que sea f-invariante.

(*ii*) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

---

26. **Ejercicio tipo parcial:** Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$f(B) = AB - BA$$

a) Hallar una base en la cual la matriz de f sea diagonal.

b) Hallar dos subespacios S_1 y S_2 invariantes por f tales que:

$$dim(S_1) = dim(S_2) = 2 \qquad \text{y} \qquad S_1 \cap S_2 = 0$$
