Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 3

Rango de matrices - Determinantes

Rango de Matrices

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.

   b) Calcular $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $\operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(A^t)$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   a) Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

   b) Para el valor de b hallado, decidir si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k+2 & 1 \\ -1 & k^2-7 & -1 & -2 \\ 1 & k^2-11 & 2k+7 & k-9 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$.

   b) Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$. Calcular $\operatorname{rg}(A \cdot B \cdot A)$.

6. Sean $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tales que $\operatorname{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$ y $\dim(E_F(P^t)) = 5$.

   a) Calcular $\dim(N(P))$, $\operatorname{rg}(P)$, $\dim(N(Q))$ y $\operatorname{rg}(Q)$.

   b) Calcular $\operatorname{rg}(Q^t \cdot P^{-1}))$.

   c) Calcular $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ es una matriz tal que $\dim(N(W)) = 3$.

Determinantes

7. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$(i) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (ii) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$iv)\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}\qquad (v)\begin{pmatrix}2 & 3 & -2 & 5\\ 4 & -5 & 0 & 6\\ 2 & 0 & -1 & 7\\ 6 & 3 & -4 & 8\end{pmatrix}\qquad (vi)\begin{pmatrix}5 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ -4 & 3 & 3 & 8\end{pmatrix}.$$

8. (i) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
   (ii) Calcular el determinante de $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ siendo

$$B = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0\\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

9. Sea $A = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular los determinantes de las matrices:

   (a) $\begin{pmatrix}d & e & f\\ g & h & i\\ a & b & c\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}-a & -b & -c\\ d-3a & e-3b & f-3c\\ 2g & 2h & 2i\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}a & g & d\\ b & h & e\\ c & i & f\end{pmatrix}$.

10. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible en cada uno de las siguientes casos:

    (a) $\begin{pmatrix}5 & 3\\ k & 2\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}4 & k\\ k & -2\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & k\\ k & 4 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

11. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $\det(A) = 4$ y $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Calcular:

    (a) $\det(A + A\cdot B)$. (b) $\det(-2A^{-1} + A^{-1}\cdot 5B)$.

12. Sea $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz inversible y sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz que verifica: $\det(A) = 8$ y $A\cdot B = \det(B)\cdot I$. Hallar $\det(B)$.

13. Sea A una matriz cuadrada. Mostrar que existe $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$ si y sólo si $0 \neq v \in Nu(A - \lambda\text{id})$ si y sólo si $\det(A - \lambda\text{id}) = 0$.

14. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix}a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ 1 & 2 & 7\\ a_{11}+2a_{13} & a_{21}+2a_{23} & a_{31}+2a_{33}\end{pmatrix}.$$

15. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ las matrices $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A.C = C.B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ y sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A+B) = \det(A-B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

   (i) Probar que el sistema $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si a , b , c y d no son todos iguales a cero.

   (ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

   (iii) Considere una matriz en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ de la forma $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$. Probar que $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si $(z, w) \neq (0, 0)$.

18. (i) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Consideremos la matriz de bloques $M \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ definida por
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$
   Mostrar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

   (ii) Sean $A_1, \ldots, A_n$ matrices cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño) y consideremos la matriz de bloques
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}.$$
   Calcular $\det(M)$.

19. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} x & a & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a & a \\ a & a & x & a & a & a \\ a & a & a & x & a & a \\ a & a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & a & x \end{pmatrix}$$

20. $a)$ Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Conjeturar el valor del determinante de la siguiente matriz.

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

21. Sea A la matriz "compañera" del polinomio $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Mostrar que $\det(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = p(t)$.

22. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

(*i*) Mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=2}^{n} (\alpha_j - \alpha_1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

(*ii*) Deducir que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i).$$

23. (*i*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ y sean $v_1, \dots, v_n$ los vectores de $\mathbb{K}^n$ dados por $v_i = (1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1})$. Determinar cuando $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(*ii*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.
Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.

24. **Ejercicio tipo parcial:**

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible que verifica

$$\det\begin{pmatrix} -3 & a_{13} & a_{12} \\ 0 & a_{23} & a_{22} \\ 3 & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & -1 & a_{13} \\ a_{21}+2a_{11} & -2 & a_{23}+2a_{13} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & -3+a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & 3+a_{31} \end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix} a_{11} & 2 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -2 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} -12 & a_{13} & a_{12} \\ 0 & a_{23} & a_{22} \\ 12 & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} = 4\det(A) - \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & -6 \\ a_{22} & a_{21} & 0 \\ a_{32} & a_{31} & 6 \end{pmatrix}$$

Hallar $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\}$.
