Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 2

Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales.

   (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$.

   (iii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

   (iv) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$.

   (v) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d & 0 & b+c \\ 0 & a & d-a \end{smallmatrix}\right)$.

2. (i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$

   (i) Decidir si existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$.

   (iii) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$ y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.

   (iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

3. Considerar las transformaciones lineales dadas en (i) y (v) del Ejercicio 1 y las dadas en (i), (ii), (iii) y (iv) del Ejercicio 2.

   (i) Calcular núcleo e imagen de cada una de ellas.

   (iv) Determinar, en cada caso, si son o no monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

4. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

5. (i) Decidir si puede existir un epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

   (ii) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. Decidir si existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset Im(f)$.

   (iii) Decidir si puede existir un monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

   (iv) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1+x_2+x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, 2x_1+x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$. Decidir si existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$.

   (v) Hallar (si existe) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $Im(f) = S$ y $Nu(f) = T$ en los siguientes casos.

      1) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle(1, 2, 1)\rangle$.

      2) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle(1, -2, 1)\rangle$.

6. En cada uno de los siguientes casos, definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

   (*i*) $(1,1,0) \in Nu(f)$ y $dim(Im(f)) = 1$.
   (*ii*) $Nu(f) \cap Im(f) = \langle (1,1,2) \rangle$.
   (*iii*) $f \neq 0$ y $Nu(f) \subset Im(f)$.
   (*iv*) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.
   (*v*) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$.
   (*vi*) $Nu(f) \neq \{0\}$, $Im(f) \neq \{0\}$ y $Nu(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

7. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos.

   a) $V = k^n$, $v = (x_1, \ldots, x_n)$, B la base canónica.
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1,2,-1)$, $B = \{(1,2,-1),(0,1,1),(0,0,2)\}$.
   c) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1,-1,2)$, $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,2)\}$.
   d) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x_1,x_2,x_3)$, $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,2)\}$.
   e) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $v = 2X^2 - X^3$, $B = \{3, 1+X, X^2+5, X^3+X^2\}$.

8. Calcular la matriz de cambio de base $C(B,B')$ en los siguientes casos.

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,2)\}$, $B' = \{(-1,3),(2,5)\}$.
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $B' = \{(1,1,1),(2,0,1),(1,1,3)\}$.
   c) $V = \mathbb{R}[X]_2$, $B = \{(3, 1+X, X^2\}$, $B' = \{1, X+3, X^2+2\}$.
   d) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B' = \{1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3\}$.

9. Sea V un k-espacio vectorial y sean B_1, B_2 y B_3 tres bases de V.

   a) Probar que $C(B_1,B_3) = C(B_2,B_3)C(B_1,B_2)$.
   b) Probar que la matriz $C(B_1,B_2)$ es inversible.

10. Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

    a) Encontrar una base B' tal que $C(B,B') = M$.
    b) Encontrar una base B' tal que $C(B',B) = M$.

11. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar la imagen y el núcleo de los morfismos f, g y $g \circ f$. Decidir si se trata de monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

12. Encontrar proyectores $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfagan las siguientes condiciones.

    a) $\mathrm{im} f = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
    b) $\ker f = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
    c) $\ker f = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_3 = 0\}$, $\mathrm{im} f = \langle (1,1,1) \rangle$.

13. Sea V un k-espacio vectorial.

    a) Sea $f : V \to V$ un proyector. Mostrar que $V = \ker f \oplus \mathrm{im} f$. Probar además que $g = \mathrm{id} - f$ es un también un proyector de V y determinar su núcleo y su imagen.
    b) Sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $S = \ker f$ y $T = \mathrm{im} f$.

14. *a*) Sean U, V y W tres espacios vectoriales, con bases B, B' y B'' respectivamente. Si $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$|g \circ f|_{B,B''} = |g|_{B',B''}\,|f|_{B,B'}.$$

b) Sean V y W espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Si B y B' son bases de V y D y D' son bases de W, mostrar que

$$|f|_{B',D'} = C(D, D')\,|f|_{B,D}\,C(B', B).$$

15. Sea V un espacio vectorial y sean B y B' dos bases de V. Si $f : V \to V$ es una transformación lineal, mostrar que

$$\mathrm{tr}|f|_{B,B} = \mathrm{tr}|f|_{B',B'}.$$

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $f^n = 0$ pero $f^{n-1} \neq 0$. Mostrar que existe una base B de V tal que

$$\big(|f|_B\big)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j + 1; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

17. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Mostrar que existe un base B de V tal que

$$\big(|f|_B\big)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ e } i \leq \dim \mathrm{im} f; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

---

18. **(Ejercicios tipo parcial)**

I) Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$ tales que

$$S = \langle x - 1, x^2 \rangle$$

$$T = \{p \in \mathbb{R}_3[x] / p'(1) = 0 \,\mathrm{y}\, p(-1) = 0\}.$$

a) Probar que $S \oplus T = \mathbb{R}_3[x]$.

b) Definir, si se puede, un proyector $\mathcal{P}$ tal que $S \subseteq \mathrm{Nu}\,\mathcal{P}$ y $\mathrm{Im}\,\mathcal{P} \subseteq T$.

c) Sean B_S y B_T bases de los subespacios S y T respectivamente y $B = B_S \cup B_T$. Calcular $C(B, E)$ y $|\mathcal{P}|_E$, donde E es la base canónica en $\mathbb{R}_3[x]$.

II) Sea $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2x2} /\ a_{11} + a_{12} = 0,\ a_{21} - a_{11} = 0,\ a_{22} = 0\}$.
Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ que verifique simultáneamente:

a) $\mathbb{S} = \mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

b) $\dim(\mathrm{Nu} f) \geq \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

c) $f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$