Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 1

Espacios vectoriales

Nota. *A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.*

Ejercicio 1. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre K.

(*i*) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \mid a_i \in K\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K.

- $+ : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
- $. : k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(*ii*) Dado X un conjunto, sea $V = K^X = \{f \mid X \to K$ tal que f es una función$\}$.

- $+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$.
- $. : (k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall\, x \in X$.

Ejercicio 2. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del K-espacio vectorial correspondiente.

(*i*) $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$.

(*ii*) $S_2 = \{a.i \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

(*iii*) $S_3 = \{f \in K[X] \mid f = 0$ ó $gr(f) \geq 2\} \subseteq K[X]$.

(*iv*) $S_4 = \{f \in K[X] \mid f = 0$ ó $gr(f) \leq 5\} \subseteq K[X]$.

(*v*) $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$.

(*vi*) $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$.

(*vii*) $S_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$.

(*viii*) $S_8 = \{A \in K^{4\times4} \mid A^t = A\} \subseteq K^{4\times4}$.

(*ix*) $S_9 = \{A \in K^{3\times3} \mid tr(A) = 0\} \subseteq K^{3\times3}$.

(*x*) $S_{10} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$.

(*xi*) $S_{11} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f''(1) = f(2)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$.

(*xii*) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_{12} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + af' + bf = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$.

(*xiii*) $S_{13} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$.

(*xiv*) $S_{14} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq k\} \subseteq K^{\mathbb{N}}$.

Ejercicio 3. Sea $A \in K^{n\times m}$ y sea $S = \{x \in K^m \mid Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de K^m.

Ejercicio 4. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V.

(i) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

(ii) Probar que si $S \cup T$ es un subespacio de V entonces $S \subset T$ ó $T \subset S$.

(iii) Encontrar S y T subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre K.

(i) K^n.

(ii) $K_n[X] = \{f \in K[X] \mid f = 0 \text{ ó } gr(f) \leq n\}$.

(iii) $K[X]$.

(iv) $K^{n\times n}$.

(v) $\mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{R}$.

(vi) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0;\ x - y = 0\}$, $K = \mathbb{R}$.

(vii) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = -A^t\}$, $K = \mathbb{R}$.

($viii$) $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] \mid f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $K = \mathbb{R}$.

(ix) $S_4 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f''' \equiv 0\}$, $K = \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.

(i) Encontrar otro sistema de generadores de S.

(ii) Determinar si $(2, 1, 3, 5)$ está en S.

(iii) Determinar si $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

(iv) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$.

Ejercicio 7. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

(i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Entonces $\langle v, w\rangle = \langle v, w + 5v\rangle$.

(ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1, v_2, w\rangle = \langle v_3, v_4, w\rangle$. Entonces $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$.

(iii) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3, w \in V$. Entonces $\langle v_1, v_2, v_3, w\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ si o sólo si $w \in \langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Ejercicio 8. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes sobre K.

(i) $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 4), (5, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$.

(ii) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

(iii) $\{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$ en $K[X]$.

(iv) $\{sen(x), cos(x)\}$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}, K = \mathbb{R}$.

(v) $\{(1, 0, 1, 0, 1, \ldots), (0, 1, 0, 1, 0, \ldots), (1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)\}$ en $K^\mathbb{N}$.

(vi) $\{(1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2), (1, \beta, \beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$.

(vii) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ en $\mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 9. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente independiente en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial correspondiente.

(*i*) $\{(1,2,k),(1,1,1),(0,1,1-k)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(*ii*) $\{(k,1,0),(3,-1,2),(k,2,-2)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(*iii*) $\{kX^2+X,-X^2+k,k^2X\}$ en $\mathbb{R}_4[X]$.

Ejercicio 10. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales.

(*i*) $\langle(1,4,-2,1),(1,-3,-1,2),(3,-8,-2,7)\rangle \subset \mathbb{R}^4$, $K=\mathbb{R}$.

(*ii*) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$, $K=\mathbb{R}$.

(*iii*) $\mathbb{C}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.

(*iv*) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, f(2)=f(-1)\}$, $K=\mathbb{R}$.

(*v*) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, f$ es un múltiplo de $(X^2-2)\}$, $K=\mathbb{R}$.

(*vi*) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \,|\, tr(A)=0\}$, $K=\mathbb{R}$.

(*vii*) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \,|\, a_i=a_j \;\forall i,j\}$.

Ejercicio 11.

(*i*) Mostrar que el conjunto $\{(1,0,0),(0,i,0),(1,1,i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(*ii*) Mostrar que el conjunto $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(*iii*) Mostrar que $\{e_1,\dots,e_n,ie_1,\dots,ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y deducir que la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es $2n$.

Ejercicio 12. Sea $F=\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[X]$ tal que $gr(f_i)=i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

Ejercicio 13. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

(*i*) $\{(1,1,1,1),(0,2,1,1)\}$, $V=\mathbb{R}^4$, $K=\mathbb{R}$.

(*ii*) $\{X^3-2X+1,X^3+3X\}$, $V=\mathbb{R}_3[X]$, $K=\mathbb{R}$.

(*iii*) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $V=\mathbb{C}^{2\times2}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.

Ejercicio 14. Extraer una base de cada uno de los siguientes sistemas de generadores de K-espacios vectoriales.

(*i*) $S=\langle(1,1,2),(1,3,5),(1,1,4),(5,1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $K=\mathbb{R}$.

(*ii*) $S=\langle X^2+2X+1,X^2+3X+1,X+2\rangle \subseteq \mathbb{R}[X]$, $K=\mathbb{R}$.

(*iii*) $S=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times2}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$.

Ejercicio 15. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos.

(*i*) $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

(*ii*) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(*iii*) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\rangle.$$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa.

(*i*) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$.

(*ii*) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$.

(*iii*) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$.

(*iv*) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5\rangle$.

(*v*) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f'(0) = f''(0) = 0\}$.

Ejercicio 18.

(*i*) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ es constante}\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(*ii*) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ (los elementos de S se llaman *funciones pares* y los de T, *funciones impares*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(*iii*) Sean $S = \{A \in K^{n\times n} \mid A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n\times n} \mid A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $K^{n\times n}$ y $S \oplus T = K^{n\times n}$.

Ejercicio 19. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(*i*) Si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ y $dim(S) = dim(T) = 2$ entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

(*ii*) Si S, T y W son subespacios de $\mathbb{R}^5$ y $dim(S) = dim(T) = dim(W) = 2$ entonces $dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 20. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k)\rangle$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1)\rangle$.

Ejercicio 21. Para cada S dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso, T se dice un *complemento* de S con respecto a V).

(*i*) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7)\rangle$, $V = \mathbb{R}^4$.

(*ii*) $S = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid tr(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(*iii*) $S = \langle 3, 1 + X^2\rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$.

Ejercicio 22. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos.

(*i*) $(1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,2,-1),(0,1,1),(0,0,2)\}$.

(*ii*) $2X^2 - X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{3, 1+X, X^2+5, X^3+X^2\}$.

(*iii*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 23. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B,B')$, hallar las coordenadas de $v \in V$ respecto de B y, utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

(*i*) $(2,3) \in \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,2)\}$ y $B' = \{(-1,3),(2,5)\}$.

(*ii*) $(-1,5,6) \in \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$.

(*iii*) $X \in \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3, 1+X, X^2\}$, $B' = \{1, X+3, X^2+X\}$.