Números complejos

Matemática 2 - Primer cuatrimestre de 2015

Consideremos el conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, y a un elemento (a, b) lo escribimos en la forma $a + ib$. Se define la operacion de suma como la suma habitual en $\mathbb{R}^2$ y el producto

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Si $z = a + bi$, llamaremos $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.

1. Calcule $(2 + i)(3 + 2i)$, $(2 - i)(3 - 2i)$, i^5, $(2 + \sqrt{3}i)^3$, $(1 + i)^2$, $(1 - i)^2$, $(1 + i)^4$.

2. Escribiendo, para $a \in R$, $a = a + i0$, muestre que $\mathbb{C}$ contiene a $\mathbb{R}$ de manera compatible con el producto, es decir, multiplicar elementos de $\mathbb{R}$ vistos como números complejos es lo mismo que multiplicarlos como números reales.

3. Muestre con esta definicion $i^2 = -1$.

4. Si $z = a + ib$, se define el conjugado de z, y se lo denota $\overline{z}$ al número complejo
$$\overline{z} = a - ib$$
Muestre que
   (a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{z}$
   (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ y si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$.
   (c) $z\overline{z} = |z|^2$, donde $|z|^2 = a^2 + b^2$, si $z = a + bi$.
   (d) $Re(z\overline{w}) = Re(\overline{z}w) = \langle z, w\rangle$, el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$.
   (e) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal, es decir,
   $$f(z + w) = f(z) + f(w),\ \forall z, w \in \mathbb{C},\ \ y\ \ f(\lambda z) = \lambda f(z)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$
   Si además $f(zw) = f(z)f(w)$ y $f(1) = 1$, muestre que hay dos posibilidades: o bien $f(i) = i$ (y por lo tanto $f = \mathrm{id}$) o bien $f(i) = -i$ (y en consecuencia f es la conjugación).

5. (Escritura polar) Si $z = a + bi \neq 0$, y θ es tal que
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \ \mathrm{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
muestre que
$$z = |z|(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$$
Si $w = |w|(\cos\beta + i\mathrm{sen}\beta)$, muestre que
$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \beta) + i\mathrm{sen}(\theta + \beta))$$

6. Llamemos $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (U por "unitario"). Muestre que si $z, w \in U(1)$ entonces $zw \in U(1)$. También $z^{-1} = \overline{z} \in U(1)$.

7. Calcule $|z|$ y ángulo θ para $(2+i)$, $(2-i)$, $(3+2i)$, $(3-2i)$, i, $(2+\sqrt{3}i)$, $(1+i)$, $(1-i)$ y verifique la fórmula de adición de ángulos (y multiplicación de módulos) para los productos realizados en el item 1.

8. Sea z un número complejo, muestre que existe un número complejo E de módulo 1 tal que $zE = |z|$.