

# MATEMÁTICA 2

Primer Cuatrimestre de 2015

## Práctica 0

---

### Ecuaciones lineales y matrices

**Ejercicio 1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre  $k = \mathbb{R}$ . ¿Cambia algo si  $k = \mathbb{Q}$ ? ¿Y si  $k = \mathbb{C}$ ?

$$(i) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 & = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = 2 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = 0 \end{cases}$$
$$(iii) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = 6 \end{cases} \quad (iv) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Determinar los  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = \alpha_3 \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos  $k$ , resolverlos.

$$(i) \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 & = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 & = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Determinar para qué valores de  $k \in \mathbb{R}$  cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$(i) \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = 2 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 & = k+2 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 & = 2 \\ -4x_3 + k^2x_4 & = -3k-2 \end{cases}$$

**Ejercicio 5.** Determinar para qué valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$(i) \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = b \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = -1 \end{cases}$$

**Ejercicio 6.** Encontrar un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales cuya solución general sea  $S = \{(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**Ejercicio 7.**

- (i) Para cada  $n \geq 2$  hallar matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que  $AB \neq BA$ .
- (ii) Encontrar todas las matrices  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tales que  $AB = BA$  para toda matriz  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  (i.e.  $A$  conmuta con **todas** las matrices de  $3 \times 3$ ).

**Ejercicio 8.** Sean  $A, B$  y  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $n \geq 2$ ). Mostrar, dando un contraejemplo, la falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i)  $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$ .  
 (ii)  $A \cdot B = A \cdot C$  y  $A \neq 0 \Rightarrow B = C$ .  
 (iii)  $A \cdot B = 0 \Rightarrow B \cdot A = 0$ .  
 (iv)  $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$ .  
 (v)  $A^2 = A \Rightarrow A = 0 \text{ ó } A = I_n$ .

**Ejercicio 9.** Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tales que  $Ax = Bx$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Probar que  $A = B$ .

**Ejercicio 10.** Decidir cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir sus inversas.

- (i)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 (ii)  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 (iii)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   
 (iv)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz inversible y sean  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Probar las siguientes implicaciones.

- (i)  $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ .  
 (ii)  $AB = AC \Rightarrow B = C$ .

**Ejercicio 12.** Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones sobre matrices cuadradas.

- (i)  $A, B$  son inversibles  $\Rightarrow A + B$  es inversible.  
 (ii)  $A$  es inversible si y sólo si  $A^t$  es inversible.  
 (iii)  $A$  es nilpotente (i.e. existe  $j \geq 1$  tal que  $A^j = 0$ )  $\Rightarrow A$  no es inversible.

**Ejercicio 13.** Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Mostrar que el sistema  $Ax = b$  tiene solución única si y sólo si  $A$  es inversible.