

Ley de Los Grandes Números y Teorema Central del Límite

Desigualdad de Chebyshev

- Para calcular la probabilidad de un evento descrito en términos de una v.a. X es necesario conocer la distribución de la v.a. La desigualdad de Chebyshev provee una cota que no depende de la distribución sino sólo de la varianza de X .



- Desigualdad de Chebyshev:

Sea X una v.a. con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2 < \infty$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Otras formas de la desigualdad de Chebyshev

$$\text{a) } \quad \forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\text{b) } \quad \forall k \geq 1, \quad P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\text{c) } \quad \forall k \geq 1, \quad P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Esta cota es muy general y por lo tanto, puede ser poco precisa. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Sea $X \sim U(0,10)$, entonces $E(X) = 5$ y $V(X) = 100/12$.

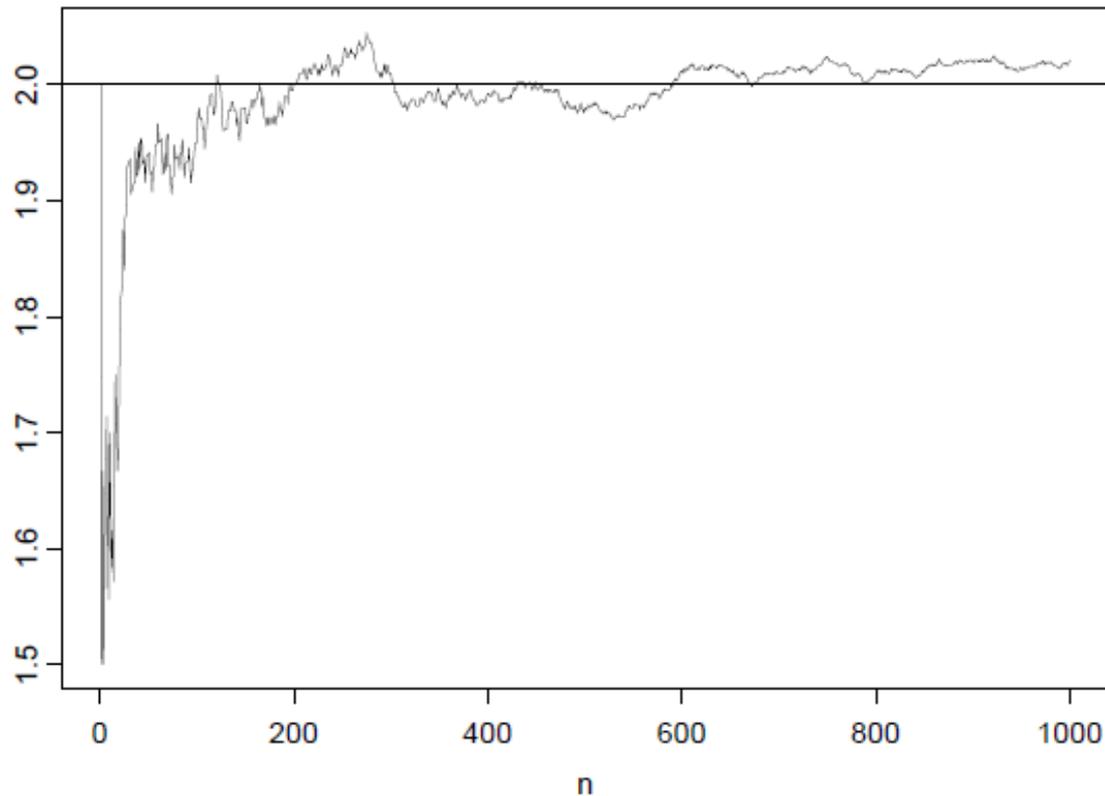
Aplicando la desigualdad de Chebyshev,

$$P(|X - 5| > 4) \leq \frac{\sigma^2}{16} = \frac{100/12}{16} \cong 0.52$$

pero, si calculamos en forma exacta esa probabilidad,

$$\begin{aligned} P(|X - 5| > 4) &= 1 - P(|X - 5| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq X - 5 \leq 4) = 1 - P(1 \leq X \leq 9) = \\ &= 1 - F_X(9) + F_X(1) = 1 - \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 0.20 \end{aligned}$$

Ley de los Grandes Números



Comportamiento asintótico del promedio muestral. El promedio del número observado de caras, \bar{x} , cuando 4 monedas equilibradas son arrojadas se aproxima al valor medio $\mu=2$ de la distribución.

¿En qué sentido converge \bar{X} a μ ?

Sea (X_n) ($n \geq 1$) una sucesión de variables aleatorias, diremos que X_n converge en probabilidad a la v.a. X y lo notaremos $X_n \xrightarrow{p} X$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ley de los Grandes Números:

Sean X_1, X_2, \dots v.a. independientes e idénticamente distribuidas (muestra aleatoria) con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2 < \infty$, entonces

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

siendo $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ el denominado promedio muestral.

Teorema Central del Límite

- Veremos ahora que aún cuando las variables no son normales, la distribución normal resulta una buena aproximación para la distribución del promedio y la suma de variables aleatorias i.i.d, a condición de que estemos promediando o sumando una cantidad suficientemente grande de variables.

Teorema Central del Límite: Sean X_1, X_2, \dots v.a. i.i.d con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$, entonces si n es suficientemente grande,

$$\frac{T - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \stackrel{(a)}{\sim} N(0,1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \stackrel{(a)}{\sim} N(0,1)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

- También podemos escribir

$$\frac{T - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \qquad \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

donde la convergencia en distribución (\xrightarrow{d}) se interpreta en el siguiente sentido:

$$P\left(\frac{T - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \leq a\right) \cong \Phi(a) \qquad P\left(\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq a\right) \cong \Phi(a)$$

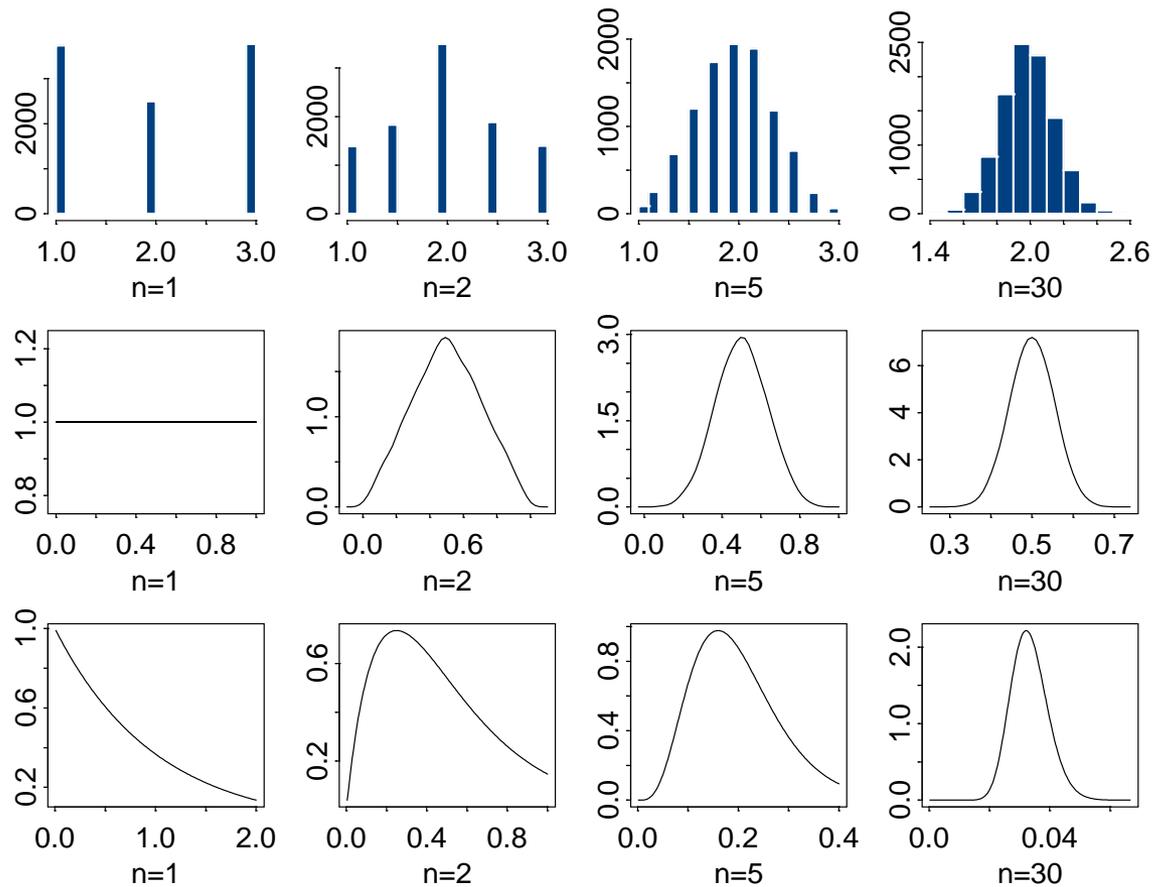


Figura 2: Distribución de \bar{x} para distintas distribuciones cuando $n=2, 5$ y 30 .
a) Distribución discreta, b) Distribución Uniforme, c) Distribución Exponencial

Ejemplo: Al sumar números, una calculadora aproxima cada número al entero más próximo. Los errores de aproximación se suponen independientes y con distribución $U(-0.5,0.5)$.

- a) Si se suman 1500 números, ¿cuál es la probabilidad de que el valor absoluto del error total exceda 15?
- b) ¿Cuántos números pueden sumarse a fin de que el valor absoluto del error total sea menor o igual que 10 con probabilidad mayor o igual que 0.90?

a) Si llamamos X_i al error correspondiente al i -ésimo sumando, el error total es

$$T_{1500} = \sum_{i=1}^{1500} X_i .$$

$$E(X_i) = 0 \text{ y } V(X_i) = \frac{1}{12} \text{ y por lo tanto } E(T_{1500}) = 0 \text{ y } V(T_{1500}) = \frac{1500}{12} .$$

Entonces,

$$P(|T_{1500}| > 15) = 1 - P(|T_{1500}| \leq 15) = 1 - P(-15 \leq T_{1500} \leq 15) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{-15}{\sqrt{1500/12}} \leq \frac{T_{1500}}{\sqrt{1500/12}} \leq \frac{15}{\sqrt{1500/12}}\right) \cong 1 - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1500/12}}\right) + \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{1500/12}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1.34) + \Phi(-1.34) = 0.18$$

b) Buscamos el valor de n tal que

$$P(|T_n| \leq 10) \geq 0.90$$

$$P(|T_n| \leq 10) \geq 0.90 \Leftrightarrow P(-10 \leq T_n \leq 10) \geq 0.90 \Leftrightarrow P\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}} \leq \frac{T_n}{\sqrt{n/12}} \leq \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.90$$

Aplicando la aproximación normal, debemos hallar n tal que

$$\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.90 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \geq 0.90 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.64 \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq 21.12 \Leftrightarrow n \leq 446$$

es decir, que se pueden sumar a lo sumo 446 números para que el valor absoluto del error total sea menor o igual que 10 con probabilidad mayor o igual que 0.90.