Consistencia, Estabilidad y Convergencia

1. Métodos a un paso

Para aproximar la solución $x = x(t)$ del problema de valores iniciales (PVI)

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x) \qquad a \leq t \leq b \\ x(a) &= \alpha \end{aligned}$$

consideramos el método numérico a un paso (M)

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha \\ x_{k+1} &= x_k + h\phi(t_k, x_k, h) \qquad k = 0, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

donde $t_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, N$ con $h = (b-a)/N$. Esperamos que x_k aproxime a $x(t_k)$. La función ϕ identifica el método a un paso (M).

Definición de convergencia. Decimos que (M) es convergente si

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = 0$$

cualquiera sea la condición inicial $x(0) = \alpha$. Notar que N (y los t_n) depende de h.

Definición de estabilidad. (M) se dice estable si existen constantes M_1 y M_2 independientes de h (y entonces de N) tales que para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^N$ y $\{y_n\}_{n=0}^N$ definidas por

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 \text{ dado} \\ x_{n+1} = x_n + h\phi(t_n, x_n, h) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} y_0 \text{ dado} \\ y_{n+1} = y_n + h\left[\phi(t_n, y_n, h) + \varepsilon_n\right] \end{array} \right.$$

se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x_n - y_n| \leq M_1 |x_0 - y_0| + M_2 \max_{0 \leq n \leq N-1} |\varepsilon_n|. \tag{1.1}$$

Esta noción de estabilidad significa que una pequeña perturbación en los datos (condición inicial y ϕ) no implica más que una pequeña perturbación en la solución, independientemente del paso h. Hay que tener en cuenta que siempre se introducen perturbaciones debido a los errores de redondeo. Entonces esta propiedad es indispensable para un método numérico.

Definición de error de truncamiento local. El error de truncamiento local en el paso n-simo, $n = 0, \ldots, N-1$, es el número τ_n dado por

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\phi(t_n, x(t_n), h) + h\tau_n.$$

Esta definición depende de la solución del problema (PVI).

Definición de consistencia. El método (M) se dice consistente si

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le N-1} |\tau_n| = 0$$

para toda solución x suficientemente regular de $x' = f(t,x)$.

Theorem 1.1 *Si el método a un paso (M) es consistente y estable entonces es convergente.*

Demostración. Hecha en clase. □

Proposition 1.2 *Supongamos que ϕ es Lipschitz respecto de la segunda variable, o sea, existe M tal que $\forall t \in [a,b], \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}$, y $\forall h$ suficientemente pequeño, se tiene*

$$|\phi(t,x,h) - \phi(t,\bar{x},h)| \le M|x - \bar{x}|.$$

Entonces el método (M) es estable.

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n=0}^N$ e $\{y_n\}_{n=0}^N$ dos sucesiones como en la definición de estabilidad. Entonces para $0 \le n \le N-1$ tenemos usando la lipschitzianeidad de ϕ

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - y_{n+1}| &\le |x_n - y_n| + h|\phi(t_n, x_n, h) - \phi(t_n, y_n, h)| + h|\varepsilon_n| \\ &\le |x_n - y_n| + hM|x_n - y_n| + h|\varepsilon_n| \\ &= (1 + hM)|x_n - y_n| + h|\varepsilon_n|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Vamos a probar por inducción que

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| \le (1+hM)^{n+1}|x_0 - y_0| + \frac{(1+hM)^{n+1} - 1}{M} \max_{0\le k\le n} |\varepsilon_k|.$$

Para $n = 0$ es cierto (poner $n = 0$ en (1.2)). Supongamos que vale para $n-1$ y queremos demostrarla para n. Estamos suponiendo que

$$|x_n - y_n| \le (1+hM)^n|x_0 - y_0| + \frac{(1+hM)^n - 1}{M} \max_{0\le k\le n-1} |\varepsilon_k|. \tag{1.3}$$

Insertando (1.3) en (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - y_{n+1}| &\le (1+hM)|x_n - y_n| + h|\varepsilon_n| \\ &\le (1+hM)\left[(1+hM)^n|x_0 - y_0| + \frac{(1+hM)^n - 1}{M} \max_{0\le k\le n-1} |\varepsilon_k|\right] + h|\varepsilon_n| \\ &\le (1+hM)^{n+1}|x_0 - y_0| + \left[(1+hM)\frac{(1+hM)^n - 1}{M} + h\right] \max_{0\le k\le n} |\varepsilon_k| \\ &= (1+hM)^{n+1}|x_0 - y_0| + \frac{(1+hM)^{n+1} - 1}{M} \max_{0\le k\le n} |\varepsilon_k|, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. Cambiando ligeramente la notación, hemos probado que para $n = 0, \ldots, N$ vale

$$|x_n - y_n| \leq (1 + hM)^n |x_0 - y_0| + \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k|$$

(el caso $n = 0$ hay que considerarlo aparte, pero es trivial).

Usando que para $s > 0$ vale $1 + s \leq e^s$ tenemos

$$\begin{aligned}
|x_n - y_n| &\leq e^{nhM} |x_0 - y_0| + \frac{e^{nhM} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \\
&= e^{(t_n - a)M} |x_0 - y_0| + \frac{e^{(t_n - a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k|
\end{aligned}$$

donde usamos que $nh = t_n - a$. Finalmente como $t_n - a \leq b - a$ y $\max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \leq \max_{0 \leq k \leq N-1} |\varepsilon_k|$ resulta

$$|x_n - y_n| \leq e^{(b-a)M} |x_0 - y_0| + \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq N-1} |\varepsilon_k|, \qquad 0 \leq n \leq N, \tag{1.4}$$

esto es (2.1) con

$$M_1 = e^{(b-a)M} \qquad \text{y} \qquad M_2 = \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M}. \qquad \square$$

Corollary 1.3 (de la demostración) *Sea x la solución de (PVI) y $\{x_n\}_{n=0}^N$ la sucesión generada por (M). Supongamos que ϕ es Lipschitz respecto de la segunda variable, con constante de Lipschitz M. Entonces tenemos la siguiente estimación del error global*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq N-1} |\tau_k|$$

donde, para cada k, τ_k es el error de truncamiento local en el paso k.

Estamos suponiendo que no cometemos errores en la condición inicial, o sea, $x_0 = \alpha$.

Demostración. En la demo de la proposición anterior, pongamos $\{x_n\}$ la sucesión generada por (M), e $\{y_n\}$ la sucesión dada por $y_n = x(t_n)$. De la definición de error de truncamiento local tenemos

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\left[\phi(t_n, x(t_n), h) + \tau_n\right],$$

o sea, y_n verifica la misma definición que en la proposición, con $\varepsilon_k = \tau_k, k = 0, \ldots, N-1$. Entonces vale (1.4) con $y_n = x(t_n)$ para $n = 0, \ldots, N$. Notar que $x(a) = x_0 = \alpha$, luego

$$|x(t_n) - x_n| \leq \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq N-1} |\tau_k|.$$

Ahora basta tomar máximo en n y notar que el lado derecho no depende de n. $\square$

Observación. Del Corolario anterior, resulta evidente que si ϕ es Lipschitz respecto de su segunda variable, y (M) es consistente, entonces (M) es convergente. Esto es un caso particular del Teorema 1.1.

Definición de orden de un método. Sea $p \geq 0$. (M) se dice de orden $\geq p$ si para toda solución suficientemente regular de (PVI) se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |\tau_n| \leq C h^p \qquad (= O(h^p))$$

para alguna constante C (C puede depender de la solución x).

Notar que si un método tiene orden $\geq p$ con $p > 0$, entonces es consistente. Así, si (M) tiene orden $\geq p$ con $p > 0$ y si ϕ es Lipschitz respecto de su segunda variable (entonces (M) es estable), sabemos que (M) es convergente. El siguiente Teorema da idea de la rapidez de la convergencia.

Theorem 1.4 *Si ϕ es Lipschitz respecto de su segunda variable y (M) es de orden $\geq p$, entonces*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq C h^p \qquad (= O(h^p)).$$

para alguna constante C (C puede depender de la solución x, y en general es distinta de la constante de la definición de orden).

Demostración. Sigue del Corolario 1.3 anterior y de la definición de orden de un método. $\square$.

Observación. En la constante C del Teorema anterior, intervienen la constante del la definición de orden (que acota los errores de truncamiento local) y la constante del Corolario 1.3 $\frac{e^{(b-a)M}-1}{M}$, donde a su vez aparece la constante de Lipschitz de ϕ. En algunos casos se necesita estimar esta constante C del Teorema, y esto a veces se puede hacer usando sólo los datos del problema (PVI), sin conocer la solución exacta x.

2. Métodos Multipaso

Consideramos el mismo problema de valores iniciales (PVI) que antes. Sea $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$ con $h = (b-a)/N$. Un método multipaso a k ~~(MM)~~ pasos consiste en calcular $x_0, x_1, \ldots, x_N$ que verifiquen la siguiente ecuación en diferencias:

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 x_n = h\left[\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n\right] \qquad \text{(MM)}$$

para $n = 0, \ldots, N-k$. Se supone que $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ son conocidos. $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ y $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k$ son constantes independientes del paso n. Estamos usando la notación

$$f_q = f(t_q, x_q).$$

Suponemos $\alpha_k \neq 0$ y $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. Si $\beta_k = 0$ el método se dice explícito, sino es implícito.

Definición de convergencia. Decimos que (MM) es convergente si cualquiera sea la condición inicial $x(a) = \alpha$ vale la siguiente propiedad: Si

$$\lim_{h \to 0} x_i = x(a), \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

entonces

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = 0$$

Notar que N (y los t_n) depende de h.

Definición de estabilidad. (MM) se dice estable si existen constantes M_1 y M_2 independientes de h (y entonces de N) tales que para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^N$ y $\{y_n\}_{n=0}^N$ definidas por

$$\begin{aligned} & x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \text{ dados} \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+i} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+i}, x_{n+i}) \qquad n = 0, \ldots, N-k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} \text{ dados} \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} &= h \left[\sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+i}, y_{n+i}) + \varepsilon_n \right] \qquad n = 0, \ldots, N-k \end{aligned}$$

se tiene

$$\max_{0 \le n \le N} |x_n - y_n| \le M_1 \max_{0 \le i \le k-1} |x_i - y_i| + M_2 \max_{0 \le n \le N-k} |\varepsilon_n|. \tag{2.1}$$

Definición de error de truncamiento local. El error de truncamiento local en el paso n-simo, $n = 0, \ldots, N-k$, es el número τ_n dado por

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x(t_{n+i}) = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+i}, x(t_{n+i})) + h\tau_n. \tag{2.2}$$

siendo x la solución de (PVI). Esta definición depende de la solución del problema (PVI).

Definición de consistencia. El método (MM) se dice consistente si

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \le n \le N-k} |\tau_n| = 0$$

para toda solución x suficientemente regular de $x' = f(t, x)$.

Theorem 2.1 *Si el método a k pasos (MM) es estable y consistente entonces es convergente.*

Volvemos a la definición de error de truncamiento local. Teniendo en cuenta que $x'(t_{n+i}) = f(t_{n+i}, x(t_{n+i}))$, y que $t_{n+i} = t_n + hi$ de la ecuación (2.2) obtenemos

$$h\tau_n = \sum_{i=0}^k \alpha_i x(t_n + hi) - h \sum_{i=0}^k \beta_i x'(t_n + hi).$$

Dejando n fijo, ponemos $t = t_n$ y entonces escribimos la ecuación anterior sin el subíndice n:

$$h\tau = \sum_{i=0}^k \alpha_i x(t + hi) - h \sum_{i=0}^k \beta_i x'(t + hi).$$

Si x es suficientemente regular podemos escribir $h\tau$ en la forma

$$h\tau = C_0 x(t) + C_1 h x'(t) + C_2 h^2 x''(t) + \ldots + C_q h^q x^{(q)}(t) + \ldots . \tag{2.3}$$

Para ver esto escribimos

$$\begin{aligned} x(t+jh) &= x(t) + x'(t)jh + \frac{x''(t)}{2}(jh)^2 + \cdots \\ x'(t+jh) &= x'(t) + x''(t)jh + \frac{x'''(t)}{2}(jh)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.3) e igualando potencias de h encontramos

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \ldots + \alpha_k, \\ C_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k) - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k) \end{aligned}$$

y para $q \geq 2$

$$C_q = \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \ldots + k^q\alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \ldots + k^{q-1}\beta_q).$$

Definición de orden de un método multipaso. Un método multipaso se dice de orden p si $C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0$ y $C_{p+1} \neq 0$.

Proposition 2.2 *Si (MM) es de orden p entonces el error de truncamiento local en el paso n-simo verifica*

$$\tau_n = C_{p+1} h^p x^{(p+1)}(t_n) + O(h^{p+1}).$$

Corollary 2.3 *(MM) es consistente si y sólo si $C_0 = C_1 = 0$, esto es, si y sólo si tiene orden ≥ 1.*

Definimos los polinomios

$$p(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j \qquad \text{y} \qquad q(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j$$

Notemos que

$$C_0 = p(1) \qquad \text{y} \qquad C_1 = p'(1) - q(1).$$

Luego, (MM) es consistente si y sólo si $p(1) = 0$ y $p'(1) = q(1)$.

Proposition 2.4 (Condición de la raíz) *El método (MM) es estable si y sólo si el polinomio p verifica las siguientes 2 condiciones:*

a) Todas sus raíces tienen módulo ≤ 1.

b) Las eventuales raíces de módulo 1 son simples.

Theorem 2.5 *Si el polinomio p verifica la condición de la raíz y si*

$$p(1) = 0 \qquad y \qquad p'(1) = q(1)$$

entonces (MM) es convergente.

3 Complementos

3.1 Demostración de una parte de la Proposición 2.4

Demostraremos que la condición de la raíz es *necesaria* para que (MM) sea estable. Entonces, Asumimos que (MM) es estable.

Supongamos primero que λ es una raíz de p con $|\lambda| > 1$. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' &= 0 \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es $x(t) \equiv 0$. Como en este caso $f(t,x) \equiv 0$, (MM) para esta ecuación se escribe

$$\begin{array}{rcl} x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \text{ dados} & & \\ \alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 x_n &=& 0 \qquad 0 \le n \le N. \end{array}$$

La sucesión $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ con $x_n = h\lambda^n$ es una solución de este esquema (para la cual x_i, $0 \le i \le k-1$ están dados por $x_i = h\lambda^i$). Otra solución de este esquema es $\{y_n\}_{0\le n\le N}$ con $y_n = 0$ para todo n. Ahora consideramos estas sucesiones en la definición de estabilidad, en donde notemos que $\varepsilon_n = 0, 0 \le n \le N-k$. Así obtenemos que para algunas constantes M_1 y M_2

$$\max_{0\le n\le N} |x_n - y_n| \le M_1 \max_{0\le i\le k-1} |x_i - y_i| + M_2 \max_{0\le n\le N-k} \varepsilon_n,$$

reemplazando por nuestros datos tenemos

$$\max_{0\le n\le N} h|\lambda|^n \le M_1 \max_{0\le i\le k-1} h|\lambda|^i$$

y usando que $h = \frac{b-a}{N}$ $(a = 0)$ y $|\lambda| > 1$ resulta

$$\frac{b-a}{N}|\lambda|^N \le M_1 \frac{b-a}{N}|\lambda|^{k-1}$$

o

$$\frac{|\lambda|^N}{N} \le M_1 \frac{|\lambda|^{k-1}}{N}.$$

Aquí k es fijo mientras que N (como h) es arbitrario, y luego obtenemos una contradicción, ya que el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $N \to \infty$ mientras que el lado izquierdo tiende a ∞. Así todas las raíces de p deben tener módulo ≤ 1.

Ahora supongamos que p tiene una raíz λ múltiple con $|\lambda| = 1$. En este caso $p(\lambda) = p'(\lambda) = 0$, es fácil ver que $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ con $x_n = hn\lambda^n$ es una solución del esquema (con las correspondientes condiciones iniciales $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$). Teniendo en cuenta la misma sucesión trivial $\{y_n\}$ como antes y usando la definición de estabilidad (de nuevo $\varepsilon_n = 0$) obtenemos

$$\max_{0\le n\le N} hn|\lambda|^n \le M_1 \max_{0\le i\le k-1} hi|\lambda|^i,$$

pero como $|\lambda| = 1$ y $h = \frac{b-a}{N}$, calculando los máximos (y cancelando $b - a$) obtenemos

$$1 \le M_1 \frac{k-1}{N}.$$

Pero el lado derecho tiende a 0 cuando $N \to \infty$, que lleva a una contradicción. Por lo tanto, las raíces de p de módulo 1 deben ser simples.

3.2 Necesidad de la consistencia y la estabilidad

El Teorema 2.1, cuya demostración es simple a partir de las definiciones de estabilidad y consistencia, tiene un recíproco que también es válido.

Proposición 3.1 (recíproco del Teorema 2.1) *Si el método multipaso (MM) es convergente, entonces es consistente y estable.*

Necesidad de la estabilidad. Debemos ver que si (MM) es convergente, entonces es estable, o sea que verifica la condición de la raíz (por la Proposición 2.4). Entonces sea λ una raíz de p. Supongamos que $|\lambda| > 1$. Como en la subsección anterior, consideramos el problema

$$\begin{cases} x' &= 0 \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es $x(t) \equiv 0$. Sabemos que $\{x_n\}$ con $x_n = h\lambda^n$ es una solución del esquema (MM) (notar que $f_j = 0$ para todo j). Para esta solución, tenemos

$$\lim_{h\to 0} x_i = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1$$

(es importante notar que k es fijo, por lo tanto los expontentes de λ son acotados). Como (MM) es convergente, de la definición de convergencia, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le N} |x(t_n) - x_n| = 0,$$

por lo que, en particular,

$$\lim_{h\to 0} x_N = 0.$$

Pero, $h = \frac{b-a}{N}$ y entonces $|x_N| = \frac{b-a}{N}|\lambda|^N \to \infty$ pues $|\lambda| > 1$, lo que es una contradicción. Entonces las raíces de p deben tener módulo ≤ 1.

En el caso de una raíz múltiple λ con $|\lambda| = 1$ se puede hacer un análisis similar teniendo en cuenta que, en tal caso, $\{x_n\}$ con $x_n = hn\lambda^n$ es una solución del esquema (MM).

Necesidad de la consistencia. Ahora suponemos que (MM) es convergente y queremos demostrar que es consistente, o sea, tenemos que ver que $p(1) = 0$ y $p'(1) = q(1)$. Notemos que por la parte anterior, ya sabemos que (MM) es estable. Vamos a usar esto más adelante.

Consideramos el problema

$$\begin{cases} x' &= 0 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

cuya solución es $x(t) \equiv 1$. Sea $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ la sucesión generada por (MM) a partir de $x_0 = x_1 = \ldots = x_{k-1} = 1$. Como 1 es la condición inicial en el problema de valores iniciales, podemos usar la definición de convergencia, y obtenemos que (también $x(t_n) = 1$)

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \leq n \leq N} |1 - x_n| = 0.$$

En particular,

$$\lim_{h \to 0} x_k = 1. \tag{1}$$

Ahora, el esquema (MM) para $n = 0$ (teniendo en cuenta que $f_j = 0$ para todo j) es

$$\alpha_k x_k + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \ldots + \alpha_0 x_0 = 0$$

y como $x_0 = x_1 = \ldots = x_{k-1} = 1$ resulta

$$\alpha_k x_k + \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_0 = 0.$$

(acá x_k depende de h, ya que $x_k \sim x(t_k)$ y $t_k = a + k\frac{b-a}{N}$, a=0). Tomando límite cuando $h \to 0$ en esta ecuación y usando (1) obtemos

$$\alpha_k + \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_0 = 0,$$

o sea, $p(1) = 0$.

Ahora consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' &= 1 \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es $x(t) = t$. Ya sabemos que $p(1) = 0$, o sea, 1 es raíz de p, y como también sabemos que (MM) es estable, debe ser $p'(1) \neq 0$, pues de lo contrario, p tendría una raíz múltiple de módulo 1. En este caso $f \equiv 1$, y por lo tanto el esquema (MM) es

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 x_n = h\left[\beta_k + \beta_{k-1} + \ldots + \beta_0\right] \tag{2}$$

($f_j = 1$ para todo j). Una solución de (2) es la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = nh\gamma$ con $\gamma = \frac{q(1)}{p'(1)}$. Para ver esto, simplemente reemplazamos esta sucesión en el lado izquierdo de (2) y operamos:

$$\begin{aligned}
&\alpha_k(n+k)h\gamma + \alpha_{k-1}(n+k-1)h\gamma + \ldots + \alpha_0 nh\gamma = \\
&= nh\gamma\left(\alpha_k + \ldots + \alpha_0\right) + h\gamma\left(k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_1\right) \\
&= nh\gamma p(1) + h\gamma p'(1) \\
&= h\gamma p'(1) \\
&= hq(1) \\
&= h(\beta_k + \beta_{k-1} + \ldots + \beta_0).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{h\to 0} x_i = \lim_{h\to 0} ih\gamma = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1$$

(es importante que i se mantenga menor que k con k fijo). Entonces usando la definición de convergencia tenemos

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leq n\leq N} |t_n - x_n| = 0.$$

(pues $x(t_n) = t_n$). En particular, para $n = N$, $t_N = b$ y luego

$$\lim_{h\to 0} |x_N - b| = 0.$$

Pero $x_N = Nh\gamma = (b-a)\gamma = b\gamma$ (pues $a = 0$), por lo tanto

$$0 = \lim_{h\to 0} |b\gamma - b| = \lim_{h\to 0} |b(\gamma - 1)| = |b||\gamma - 1|$$

y como $b \neq 0$ (pues $a = 0$, sino estaríamos considerando el problema en un solo punto, lo que no tiene sentido), debe ser $\gamma = 1$, esto es $q(1) = p'(1)$, como queríamos.