Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2015

Soluciones débiles

Ejercicio 1. Consideremos el siguiente operador elíptico

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$

donde $\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$ y $c \in L^\infty$.

Probar que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram si $c(x) \ge -\mu$ $(x \in U)$.

Observar que no se asume la simetría de la matriz $(a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$.

Ejercicio 2. Una función $u \in H_0^2(U)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } U \\ u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

si verifica

$$\int_U \Delta u \Delta v \, dx = \int_U f v \, dx$$

para toda $v \in H_0^2(U)$. $(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u))$.

1. Probar que $u \in C^4(U) \cap C^1(\overline{U})$ es solución clásica de (1) si y sólo si es solución débil de (1).
2. Probar que dada $f \in L^2(U)$ existe una única solución débil de (1).

   Sugerencia: Usar el Ejercicio 9 de la práctica 7 para probar que $\|\Delta u\|_{L^2(U)}$ define una norma equivalente a la usual en $H_0^2(U)$.

Ejercicio 3. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

donde $\partial U \in C^1$ y $f \in L^2(U)$.

1. Mostrar que $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

   $$\int_U \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_U u\varphi \, dx = \int_U f\varphi \, dx$$

   para toda $\varphi \in C^1(U) \cap C(\overline{U})$.
2. Mostrar que para toda $f \in L^2(U)$ existe una única $u \in H^1(U)$ solución débil de este problema.

Ejercicio 4. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\partial U \in C^1$ y $f \in L^2(U)$.

1. Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_U f \, dx = 0$.

2. Mostrar que si $f \in L^2(U)$ verifica que $\int_U f\,dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(U)$ con $\int_U u\,dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(U)$ salvo constante.

   Sugerencia: Usar la desigualdad de Poincaré dada por el Ejercicio 12 de la práctica 7 y usar el Teorema de Lax-Milgram en el subespacio ortogonal a las constantes en $H^1(U)$.

Ejercicio 5 (Principio débil del máximo)**.** Sea $\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)$ un operador uniformemente elíptico con $a_{ij} \in L^\infty(U)$.

Decimos que $u \in H^1(U)$ verifica $\mathcal{L}u \le 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v\,dx \le 0, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(U),\ v \ge 0.$$

1. Verificar que $u \in C^2(U)$ es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si y sólo si $\mathcal{L}u \le 0$.
2. Probar que si u es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ y $u^+ \in H_0^1(U)$ (es decir $u \le 0$ en ∂U), se tiene que $u \le 0$ en U.

Ejercicio 6. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\partial U \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \uparrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(U)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(U)$ y una base ortogonal de $H^1(U)$.

Ejercicio 7 (Principio del anti-máximo)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $u \in H_0^1(U)$ una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(U)$.

Verificar que si $\lambda > \lambda_1$ y $f \ge 0$ entonces u cambia de signo en U (λ_1 denota al primer autovalor de $-\Delta$ en U).

Ejercicio 8. Sea $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \le V(x) \to \infty$ si $|x| \to \infty$.

1. Probar que si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que
$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en } L^2(B_r(0)), \quad \text{para todo } r > 0.$$
2. Probar que si, además,
$$\|f_k\|^2_{L^2_V(\mathbb{R}^n)} = \|f_k\|_{2,V} := \int_{\mathbb{R}^n} f_k^2 V(x)\,dx \le C \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$
entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y
$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n).$$
3. Concluir que $H := H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2_V(\mathbb{R}^n)$ verifica $H \subset\subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Es decir, toda sucesión acotada en H con norma dada por $\|f\|^2 := \|\nabla f\|_2^2 + \|f\|_{2,V}^2$, tiene una subsucesión convergente en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

4. Probar que existe una suceción $0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \cdots \leq E_k \uparrow \infty$ de autovalores de la *ecuación de Schröedinger*

$$-\Delta u + V(x)u = Eu \text{ en } \mathbb{R}^n,$$
$$u \in H,$$

y que las autofunciones forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 9 (Alternativa de Fredholm para operadores simétricos)**.** El objetivo de este ejercicio es dar una demostración del Teorema de la alternativa de Fredholm para operadores simétricos basándose en el Teorema de diagonalización de operadores elípticos simétricos.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathcal{L}$ un operador elíptico simétrico dado por

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$

donde $a_{ij}, c \in L^\infty(U)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$ y la matriz $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es definida positiva.

Notemos por $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ los autovalores de $\mathcal{L}$ y por $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(U)$ las autofunciones asociadas normalizadas de manera tal que formen una base ortonormal de $L^2(U)$.

Sea $f \in L^2(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Probar que si $\lambda \neq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - \lambda u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases} \tag{2}$$

admite una única solución.

Sugerencia: Expandir tanto u como f en la base $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y despejar los coeficientes de u de la ecuación (2).

2. Probar que si $\lambda_{k-1} < \lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l-1} < \lambda_{k+l}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces el problema (2) admite una solución si y sólo si $(f, w_j) = 0$, $j = k, \dots, k+l-1$ donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno en $L^2(U)$.

Verificar que en ese caso, el conjunto de soluciones es una variedad lineal de dimensión l.

Ejercicio 10 (Lema de Cea)**.** Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita $\mathbb{V} \subset H_0^1(U)$, $\mathbb{V} = \text{gen}\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in \mathbb{V}$ como la solución del problema

$$\int_U \nabla\tilde{u} \cdot \nabla\phi_i \, dx = \int_U f\phi_i \, dx \quad i = 1, \dots, d.$$

1. Probar que $\tilde{u}$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).
2. Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(U)} \leq C \inf_{v\in\mathbb{V}} \|u - v\|_{H_0^1(U)},$$

donde $C > 0$ es una constante que depende únicamente de $\mathbb{V}$.

Esto dice que el método propuesto obtiene como resultado la *mejor aproximación* que permite el subespacio $\mathbb{V}$.

Ejercicio 11. Se define el $p-$*Laplaciano* como $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{3}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado y $f \in L^{p'}(U)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

1. Probar que $u \in C_0^2(U)$ es solución de (3) si y sólo si verifica la siguiente formulación débil
$$\int_U |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_U f\varphi\, dx,$$
para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(U)$.
2. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ minimiza el siguiente funcional
$$\Psi\colon W_0^{1,p}(U) \to \mathbb{R}, \quad \Psi(u) := \frac{1}{p}\int_U |\nabla u|^p\, dx - \int_U fu\, dx,$$
entonces u es una solución débil de (3).
3. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ es una solución débil de (3), entonces u es un mínimo de Ψ.
4. Verificar que Ψ es estríctamente convexo y deducir que Ψ tiene a lo sumo un mínimo. Concluir que (3) tiene a lo sumo una única solución débil.
5. (este ítem es sólo para los que tengan conocimiento sobre topologías débiles) Probar que Ψ tiene un mínimo en $W_0^{1,p}(U)$ y concluir que el problema (3) admite una única solución.

   Sugerencia: Considerar una sucesión minimizante, probar que está acotada y deducir que contiene una subsucesión débil convergente. Usar la semicontinuidad inferior de la norma con respecto a la convergencia débil para probar que ese límite débil es efectivamente el mínimo de Ψ.

Ejercicio 12. Sea
$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u).$$
Decimos que el operador $u_t + \mathcal{L}u$ es uniformemente parabólico si el operador $\mathcal{L}$ es uniformemente elíptico, i.e. existe $\theta > 0$ tal que
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$
para todo $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $a_{ij} \in L^\infty(U)$ y $f \in L^2(U)$.

Consideremos el siguiente problema parabólico:
$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } U \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = f & \text{en } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

1. Dar una definición adecuada de solución débil y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución clásica.
2. Probar, por el método de separación de variables, que existe una solución débil del problema parabólico.

Ejercicio 13. Considerar la siguiente ecuación del calor con condiciones de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U \times (0,T) \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = f & \text{en } U \end{cases}$$

1. Dar una definición adecuada de solución débil y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución clásica.
2. Probar que existe una solución débil.