

# Ecuaciones Diferenciales – 1º cuatrimestre 2015

## ECUACIÓN DE ONDAS

**Ejercicio 1.** Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = h(x, t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Utilizar la transformada de Fourier para hallar la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde  $g \in \mathcal{S}$ .

Sugerencia: Transformar Fourier en la variable  $x$  y para la ODE resultante busque soluciones de la forma  $\beta e^{t\gamma}$  ( $\beta$  y  $\gamma$  números complejos).

**Ejercicio 3.** Verificar que el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

transforma la ecuación de ondas  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$  en

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

**Ejercicio 4.** Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 5.** Sean  $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ,  $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Definamos  $u$  por la fórmula de Kirchhoff.

Probar que  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  y satisface el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

**Ejercicio 6** (Equipartición de la energía). Sea  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  una solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Supongamos que  $g$  y  $h$  son suaves con soporte compacto.

La energía cinética  $k(t)$  y la energía potencial  $p(t)$  se definen como

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u)^2 dx, \quad p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u)^2 dx.$$

Probar que

1.  $k(t) + p(t)$  es constante en  $t$ .
2.  $k(t) = p(t)$  para tiempos  $t$  suficientemente grandes.  
(Sugerencia: Usar que  $u$  viene dado por  $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$ .)

**Ejercicio 7.** Sea  $u$  la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde  $g, h$  son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante  $C$  tal que

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

**Ejercicio 8.** Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función  $u$  tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) (\partial_t^2 \phi(x, t) - \partial_x^2 \phi(x, t)) dx dt = 0$$

para toda  $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ .

1. Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
2. Mostrar que las funciones discontinuas

$$u_1(x, t) = H(x - t), \quad u_2(x, t) = H(x + t)$$

donde  $H$  es la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

**Ejercicio 9.** Sea  $f \in C_c(\mathbb{R})$ . Probar que  $u(x, t) \equiv f(x - t)$  es solución débil de la ecuación de ondas unidimensional en el sentido del ejercicio anterior.

**Ejercicio 10.** Encontrar una solución de

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \lambda^2 u,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ , de la forma  $u = f(x^2 - t^2) = f(s)$ , donde  $f(0) = 1$ , en forma de serie de potencias en  $s$ .

**Ejercicio 11.** Hallar la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = f(t) & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

con  $f, g, h \in C^2$  que satisfacen

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

Verificar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas aún sobre la característica  $x = t$ .

**Ejercicio 12.** Probar que si  $u$  es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e.  $u(x, t) = w(|x|, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ), se tiene que existen  $F$  y  $G$  tales que

$$u(x, t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|}.$$