Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2015

Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Resolver

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \partial_i u = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} = x_2 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Resolver

$$\begin{cases} x \cdot \nabla u = |x|^2 & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} = 3x_n. \end{cases}$$

Estudiar el dominio de definición de la solución.

Ejercicio 3. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

es $u(x, y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$.

¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 4. Probar que no existe solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u$$

que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

Ejercicio 5. Probar que la solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u^2$$

cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

Ejercicio 6. Sea $u(x, t)$ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} u_t + f(x, t)u_x = \psi(x, t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Ver que sobre las trayectorias $(x(t), t)$, u se expresa como

$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(s), s)ds.$$

Ejercicio 7. Hallar la solución de la ecuación

$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x + y)u$$

que satisface $u(0, y) = y$.

Ejercicio 8. Dado

$$Lu \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$

resolver:

1. $\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ u(x, y, 0) = xy & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
   imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

Ejercicio 9. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema

$$\begin{cases} c_t + vc_x = f(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ c(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hallar una fórmula explícita cuando $f(x,y) = e^{-t} \sin x$.