

# Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2015

## ECUACIÓN DEL CALOR

**Ejercicio 1.** Sea  $u$  una solución regular de  $u_t - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ .

1. Mostrar que  $u_\lambda(x, t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$  también resuelve la ecuación del calor para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Mostrar que  $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  también resuelve la ecuación del calor.

**Ejercicio 2.** Diremos que una función  $u$  es *calórica* en  $U$  si verifica la ecuación del calor  $u_t - \Delta u = 0$  en  $U$ . Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre  $u$  necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales:* Si  $u_1$  y  $u_2$  son funciones calóricas, entonces  $\alpha u_1 + \beta u_2$  es calórica.
2. *Traslaciones:* Si  $u(x, t)$  es calórica, entonces  $u(x - \xi, t - \tau)$  es calórica.
3. *Diferenciación respecto a parámetros:* Si  $u(x, t, \lambda)$  es calórica para cada  $\lambda$ , entonces  $\partial_\lambda u(x, t, \lambda)$  es calórica para cada  $\lambda$ .
4. *Integración respecto a parámetros:* Si  $u(x, t, \lambda)$  es calórica para cada  $\lambda$ , entonces  $\int_a^b u(x, t, \lambda) d\lambda$  es calórica.
5. *Diferenciación respecto a  $x$  y  $t$ :* Si  $u(x, t)$  es calórica, entonces  $D_x^\alpha \partial_t^k u$  es calórica.
6. *Integración respecto a  $x$  y  $t$ :* Si  $u(x, t)$  es calórica,  $n = 1$ , entonces  $\int_{x_0}^x u(y, t) dy$  es calórica si  $\partial_x u(x_0, t) = 0$  y  $\int_a^t u(x, s) ds$  es calórica si  $u(x, a) = 0$ .
7. *Convoluciones:* Si  $u(x, t)$  es calórica, entonces  $\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y, t) \varphi(y) dy$  y  $\int_a^b u(x, t-s) \varphi(s) ds$  son calóricas.

**Ejercicio 3.** 1. Si  $\phi = \phi(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ , es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^3$  (i.e.  $\phi(x, t) = w(|x|, t)$  con  $w : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ), entonces  $\phi$  satisface

$$(1) \quad \phi_{rr} + \frac{2}{r} \phi_r = \phi_t \quad t > 0, \quad r > 0.$$

2. Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio  $\psi = r\phi$  a la ecuación del calor unidimensional.

**Ejercicio 4.** Para  $i = 1, \dots, n$  consideramos  $u_i = u_i(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , soluciones de

$$\begin{cases} \partial_t u_i = \partial_{xx} u_i \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x). \end{cases}$$

Probar que si definimos para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x_1, t) \cdots u_n(x_n, t) \\ \varphi(x) &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \end{aligned}$$

entonces  $u$  es solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  con  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

**Ejercicio 5.** Supongamos  $n = 1$  y  $u(x, t) \equiv v(x^2/t)$ .

1. Mostrar que  $u_t = \partial_{xx} u$  si y sólo si

$$(2) \quad 4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0.$$

2. Verificar que la solución general de (2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2.$$

3. Derivar  $v(x^2/t)$  respecto a  $x$  y seleccionar  $C_1$  adecuadamente para obtener la solución fundamental  $\Phi$ .

**Ejercicio 6.** Sea

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0),$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

1. Verificar que  $u$  satisface la ecuación del calor si y sólo si  $v$  satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

para  $y = t^{-\beta} x$ .

2. Verificar que si  $\beta = 1/2$ ,  $v$  satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

3. Verificar que si  $v$  es radial, i.e.  $v(y) = w(|y|)$  para  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $w$  satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

donde  $r = |y|$ ,  $' = \frac{d}{dr}$ .

4. Tomar  $\alpha = n/2$  y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

**Ejercicio 7** (Método de similaridad).

1. Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$\phi(x, t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Mostrar que el método de similaridad dado en el ítem anterior también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\partial_x (K(u) \partial_x u) = \partial_t u, \quad K \in C^1.$$

**Ejercicio 8.**

- Sea  $a(t) > 0$  una función continua y sea  $u(x, t)$  una solución regular de  $u_t = a \Delta u$ . Mostrar que existe un cambio de variables  $t = \phi(\tau)$  tal que  $U(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$  es solución de la ecuación del calor.
- Sea  $b(t) \in \mathbb{R}^n$  continua y sea  $u(x, t)$  solución regular de  $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$ . Mostrar que existe un cambio de variables  $x = \psi(y, t)$  tal que  $U(y, t) = u(\psi(y, t), t)$  es solución de la ecuación del calor.
- Sea  $c(t) \in \mathbb{R}$  continua y sea  $u(x, t)$  solución regular de  $u_t + cu = \Delta u$ . Mostrar que existe  $\varphi(t)$  derivable, tal que  $U(x, t) = u(x, t) \varphi(t)$  es solución de la ecuación del calor.
- Escribir una fórmula explícita para una solución de

$$\begin{cases} au_t + cu = \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde  $c(t) \in \mathbb{R}$ ,  $a(t) > 0$  y  $b(t) \in \mathbb{R}^n$  son continuas.

**Ejercicio 9** (Principio de Duhamel). Sea  $u$  la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx} u = g(x, t) & \text{en } (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Probar que  $u$  puede ser representada en la forma

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(x, t; s) ds,$$

donde  $\Phi$  es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (s, +\infty), \\ \Phi(0, t; s) = \Phi(L, t; s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x, s; s) = g(x, s) & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

**Ejercicio 10.** Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - k\partial_{xx}u = g(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde  $f$  y  $g(\cdot, t)$  para cada  $t$  fijo, son funciones de  $\mathcal{S}$ .

**Ejercicio 11.** Deduzca la fórmula explícita

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} h(s) ds$$

para la solución de

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx}u = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = h(t), \end{cases}$$

donde  $h(0) = 0$ . (Pista: defina  $v(x, t) = u(x, t) - h(t)$  y extienda a  $v$  por imparidad.)

**Ejercicio 12.** Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx}u = 0, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty N(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

donde  $N(x, \xi, t) = \Phi(x - \xi, t) + \Phi(x + \xi, t)$  y  $\Phi$  es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender  $f$  por paridad a  $-\infty < x < 0$  y resolver el problema de valores iniciales para la  $f$  extendida.)

**Ejercicio 13.** Sea  $u(x, t)$  solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \partial_{xx}u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de  $\varphi$  en la variable  $x$  con la solución fundamental. Probar que si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}) \forall t > 0$  y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

**Ejercicio 14.** Decimos que  $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

1. Probar que  $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$ .
2. Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un función suave y convexa. Probar que si  $u$  es solución de la ecuación del calor y  $v = \phi(u)$ , entonces  $v$  es una subsolución.
3. Probar que  $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$  es una subsolución si  $u$  es una solución de la ecuación del calor.

**Ejercicio 15.** 1. Sea  $C(x, t; r) = B(x, r) \times (t - r^2, t]$ . Probar que si  $u(x, t)$  es solución de la ecuación del calor en  $C(0, 0; 2)$ , existe una constante  $C$  universal tal que

$$\max_{C(0,0;1)} |\nabla_x u(x, t)| \leq C \max_{C(0,0;2)} |u(x, t)|.$$

2. Con la notación del ejercicio anterior, probar que si  $K \subset \overline{U_T} \setminus \partial_p U_T$  es compacto, existe entonces una constante  $C$  que depende de  $\text{dist}(K, \partial_p U_T)$  tal que

$$\max_K |\nabla_x u(x, t)| \leq C \max_{U_T} |u(x, t)|.$$

**Ejercicio 16.** Sean  $u_n$  soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = 0 & \text{en } U_T \\ u_n = f_n & \text{en } \partial_p U_T, \end{cases}$$

Probar que si  $f_n \rightrightarrows f$  uniformemente en  $\partial_p U_T$ , entonces existe  $u$  regular tal que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente sobre  $U_T$  y  $u$  es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = f & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases}$$

**Ejercicio 17.** Sea  $u$  una solución acotada de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Probar que  $u$  es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que  $u$  sea acotada?

**Ejercicio 18.** Sea  $u$  una solución de la ecuación del calor en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $u = 0$  en  $x_1 = 0$ , uniformemente Lipschitz. Probar que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x, t) = \alpha x_1$ .

**Ejercicio 19** (Principio del máximo para problemas parabólicos). Definimos

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \partial_i u,$$

donde los coeficientes  $a_{ij}, b_i$  son continuos,  $a_{ij} = a_{ji}$  y la matriz  $A = (a_{ij})$  es definida positiva. Es decir,  $\mathcal{L}$  es un operador elíptico según la definición del Ejercicio 18 de la práctica 2.

Probar que si  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  satisface

$$u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Al operador  $\partial_t + \mathcal{L}$  se lo denomina *operador parabólico*.

**Ejercicio 20.** Sea  $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$  solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } U_T, \\ u = 0 & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases}$$

Probar que si  $f \leq 0$ , entonces  $u_t \leq 0$ .

(Sugerencia: Definir  $w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)$ , calcular  $w_t - \Delta w$  y aplicar el principio del máximo.)

**Ejercicio 21.** Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto  $L = \bar{m}h + h/2 > 0$  se ubica una barrera perfectamente refractante. Por esto nos referimos que si una partícula llega al punto  $L - h/2$  a tiempo  $t$  y se mueve hacia la derecha, entonces es reflejada y regresa al punto  $L - h/2$  en el tiempo  $t + \tau$ .

Mostrar que cuando  $h, \tau \rightarrow 0$  y  $h^2/\tau = 2D$ ,  $p = p(x, t)$  es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L, t > 0 \\ p(x, 0) = \delta & x < L \\ p_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Más aún  $\int_{-\infty}^L p(x, t) dx = 1$ . Calcular explícitamente la solución.

**Ejercicio 22.** Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto  $L = \bar{m}h > 0$  se ubica una barrera perfectamente absorbente. Por esto nos referimos a que si una partícula llega al punto  $L - h$  a tiempo  $t$  y se mueve a la derecha, es absorbida y se detiene en  $L$ . Mostrar que cuando  $h, \tau \rightarrow 0$  y  $h^2/\tau = 2D$ ,  $p = p(x, t)$  es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L, t > 0 \\ p(x, 0) = \delta & x < L \\ p(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Calcular explícitamente la solución.