ANÁLISIS REAL - RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO PARCIAL

(1) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $|\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 0\}| = 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x\phi(y)$. Probar que $E \subseteq \mathbb{R}$ medible implica $f^{-1}(E)$ medible.

Demostración:

Sea G es un conjunto de clase G_δ, $G = \cap_{i=1}^{\infty} G_i$ donde los G_i son conjuntos abiertos. Como f es una función continua, $f^{-1}(G_i)$ es abierto para todo i y vale que

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\cap_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \cap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(G_i)$$

Por lo tanto, $f^{-1}(G)$ es un conjunto de clase G_δ, así que es medible.

Si ahora N es un conjunto de medida nula, sabemos que existe G de clase G_δ tal que $N \subseteq G$ y $|N| = |G| = 0$. De la inclusión $N \subseteq G$ se deduce además que $f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(G)$.

Consideramos las secciones

$$f^{-1}(G)_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in f^{-1}(G)\} = \{x \in \mathbb{R} : x\phi(y) \in G\}.$$

Notemos que si llamamos $Z = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 0\}$, por hipótesis vale que $|Z| = 0$, y si $y \notin Z$, $f^{-1}(G)_y = \frac{G}{\phi(y)}$ y, por lo tanto, $|f^{-1}(G)_y| = 0$.

Entonces,

$$|f^{-1}(G)| = \int_{\mathbb{R}-Z} |f^{-1}(G)_y| \, dy = 0$$

y como habíamos visto que $f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(G)$, resulta que $|f^{-1}(N)| = 0$. En particular, es medible.

Como todo conjunto E medible se puede escribir como $E = G - N$ con G de clase G_δ y N de medida nula, vale entonces que $f^{-1}(E) = f^{-1}(G) - f^{-1}(N)$, y por lo tanto $f^{-1}(E)$ resulta medible.

(2) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sean $f, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $f_k \to f$ en casi todo punto de E y $f, f_k \in L^p$ para todo k, donde $1 < p < \infty$. Si además vale que $\|f_k\|_p \le M < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, probar que

$$\int_E f_k g \to \int_E f g$$

para toda $g \in L^{p'}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(Sugerencia: probarlo primero en el caso $|E| < +\infty$).

Demostración:

Supongamos primero que $|E| < +\infty$. Podemos asumir además que $|E| > 0, M > 0$ y $\|g\|_{p'} > 0$, porque sino el resultado es obvio.

Notemos que $g \in L^{p'}, g^{p'} \in L^1$, así que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A |g^{p'}| < \varepsilon^{p'}$$

para todo A tal que $|A| < \delta$.

Por otro lado, como $f \in L^p$, f es finita en c.t.p. de E, y como $f_k \to f$ en c.t.p. de E, por el teorema de Egorov existe un conjunto cerrado $F \subseteq E$ tal que $|E - F| < \delta$ y $f_k \to f$ uniformemente en F, por lo que $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in F$ y k suficientemente grande. Entonces, para k suficientemente grande, usando lo anterior y la desigualdad de Hölder con exponentes p y p',

$$\begin{aligned}
|\int_E f_k g - \int_E fg| &\leq \int_E |(f - f_k)g| \\
&= \int_F |(f - f_k)g| + \int_{E-F} |(f - f_k)g| \\
&\leq \varepsilon \int_F |g| + \|f - f_k\|_p \left(\int_{E-F} |g|^{p'}| \right)^{1/p'} \\
&\leq \varepsilon |F|^{1/p} \|g\|_{p'} + 2M\varepsilon \\
&\leq \varepsilon (|E|^{1/p} \|g\|_{p'} + 2M)
\end{aligned}$$

que tiende a cero con ε.

Si ahora $|E| = +\infty$, definimos $g_j = g\chi_{E \cap \{|x|<j\}}$ y aplicando el resultado para medida finita, vale que

$$\lim_{k \to \infty} \int_E (f_k - f) g_j = 0$$

para todo $j \geq 1$. Como $g \in L^p(E)$, $|g_1| \leq |g_2| \leq \dots$ y $|g_j| \to |g|$, entonces por el teorema de Beppo-Levi

$$\lim_{j \to \infty} \int_E |g_j|^{p'} = \int_E |g|^{p'},$$

y entonces existe j tal que

$$\int_{E - \{|x|<j\}} |g|^{p'} = \int_E |g|^{p'} - \int_E |g_j|^{p'} < \varepsilon^{p'}.$$

Entonces, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_E |(f_k - f)g| &\leq \int_E |(f_k - f)g_j| + \int_E |(f_k - f)(g - g_j)| \\
&= \int_E |(f_k - f)g_j| + \|f - f_k\|_p \|g - g_j\|_{p'} \\
&< \varepsilon + 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

(3) Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de medida finita. Probar que entonces, para todo $0 < \delta < 1$, vale que

$$\int_E |Mf(x)|^\delta \, dx \leq C|E|^{1-\delta} \|f\|^\delta_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

donde C es una constante positiva que depende de sólo de n y δ y Mf es la maximal de Hardy-Littlewood de f.

Demostración:
Recordemos que

$$\int_E |Mf(x)|^\delta \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (|Mf(x)|\chi_E(x))^\delta \, dx = \delta \int_0^\infty t^{\delta-1} |\{|Mf(x)|\chi_E > t\}| \, dt$$

Notemos que, como la maximal es de tipo débil (1,1),

$$|\{x \in E : Mf(x) > t\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C}{t}\|f\|_1$$

donde C sólo depende de n y δ, pero además es obvio que

$$|\{x \in E : Mf(x) > t\}| \leq |E|$$

así que, observando que

$$|E| \leq \frac{C}{t}\|f\|_1 \Leftrightarrow t \leq \frac{C\|f\|_1}{|E|}$$

tenemos que

$$\int_E |Mf(x)|^\delta \, dx \leq \delta \int_0^{C\|f\|_1/|E|} t^{\delta-1}|E| \, dt + \delta \int_{C\|f\|_1/|E|}^\infty Ct^{\delta-2}\|f\|_1 \, dt$$

e integrando en t y sumando se tiene lo que queríamos probar.

(4) Sea μ una medida de Borel finita en $[1, \infty)$, absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m, y tal que $\mu(B) = a\mu(aB)$ para todo $a \geq 1$ y todo subconjunto B boreliano de $[1, \infty)$. Probar que si la derivada de Radon-Nikodym $d\mu/dm$ es una función continua, entonces existe $c \geq 0$ tal que $[d\mu/dm](x) = c/x^2$ para todo $x \geq 1$.

Demostración:
Llamemos $f = d\mu/dm$. Entonces, como $\mu(B) = a\mu(aB)$, vale que

$$\int_B f \, dm = a \int_{aB} f \, dm.$$

Si $B = [1, x]$, resulta entonces

$$\int_1^x f(t) \, dt = a \int_a^{ax} f(t) \, dt$$

para todo $a \geq 1$ y todo $x \geq 1$. Derivando con respecto a x, obtenemos $f(x) = a^2 f(ax)$ para todo $x \geq 1$ y todo $a \geq 1$ (porque además sabemos que f es continua, sino sería en c.t.p.). Tomando $x = 1$, resulta $f(a) = \frac{f(1)}{a^2}$ para todo $a \geq 1$, por lo que el enunciado vale tomando $c = f(1)$.