ANÁLISIS REAL - RESOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL

(1) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue y de medida finita. Si $E = E_1 \cup E_2$ con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y se satisface $|E| = |E_1|_e + |E_2|_e$, probar que E_1 y E_2 son medibles.

Demostración:
Sea H un conjunto de clase G_δ tal que $E_2 \subseteq H$ y $|E_2|_e = |H|$. Entonces $E - H$ es un conjunto medible y $E - H \subseteq E_1$, por lo que $|E - H| \leq |E_1|_i$.
Luego, tenemos que

$$|E_1|_i \geq |E - H| = |E| - |H| = |E| - |E_2|_e,$$

de donde deducimos que

$$|E_1|_e + |E_2|_e = |E| \leq |E_1|_i + |E_2|_e$$

o sea, $|E_1|_e \leq |E_1|_i$ y, dado que la otra desigualdad vale siempre, $|E_1|_i = |E_1|_e$. Como estamos en medida finita, esto implica que E_1 es medible pues si $|E_1|_i = |E_1|_e$ entonces existen G abierto y F cerrado tal que $F \subseteq E_1 \subseteq G$ y $|G \setminus F| < \varepsilon$. Por lo tanto como $G \setminus E_1 \subseteq G \setminus F$, se tiene que $|G \setminus E_1| \leq |G \setminus F| < \varepsilon$.
Como E y E_1 son medibles, también lo es $E_2 = E - E_1$.

(2) Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f_n, f, g : X \to \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones valen si y sólo si la medida μ es completa:
(a) Si f es medible y $f = g$ en casi todo punto, entonces g es medible.
(b) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son medibles y $f_n \to f$ en casi todo punto, entonces f es medible.

Demostración:
(a) Basta ver que para todo boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que $g^{-1}(B)$ es medible. Como $f = g$ c.t.p, existe un conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin E$.
Entonces,

$$g^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \setminus E) \cup (E \cap g^{-1}(B)).$$

Como f es medible, tenemos que $f^{-1}(B)$ es medible, y como μ es completa, tenemos que $E \cap g^{-1}(B)$ es medible. Luego $g^{-1}(B)$ es medible.
Para la recíproca, si μ no es una medida completa, entonces existen un conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$ y un conjunto $F \subset E$ no medible. Entonces, la función χ_F es no medible y $\chi_F = 0$ c.t.p.

(b) Sea $\tilde{f} = \limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_k \sup_{n\geq k} f_n$, porque supremo e ínfimo de funciones medibles es medible. Entonces, como cada f_n es medible, $\tilde{f}$ es medible.

Como $f_n \to f$ c.t.p, entonces $\tilde{f} = f$ en casi todo punto y, por el ítem (a), f es medible.

Para la recíproca, si consideramos F como en el ítem anterior y las funciones $f_n = 0$ para todo n y $f = \chi_F$, entonces las funciones f_n son medibles y convergen c.t.p a una función no medible.

(3) Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles y $g \in L^1(X, \mu)$ tales que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo x y para todo n. Si $f_n \to f$ en casi todo punto, probar que para todo $\delta > 0$ existe $F \in \Sigma$ tal que $\mu(F^c) < \delta$ y $f_n \rightrightarrows f$ en F.

(Sugerencia: para cada $k \in \mathbb{N}$, considerar el conjunto $\cup_n\{|f_n| > \frac{1}{k}\}$).

Demostración: Fijamos $\epsilon > 0$. Sea $E_k := \bigcup_n\{|f_n| > 1/k\}$. Ahora observemos que $X = \bigcup_k E_k \bigcup\{f_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que en el ultimo conjunto f_n converge uniformente porque de hecho es constantemente 0. Ahora como $|f_n| \leq g$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\{|f_n| > 1/k\} \subseteq \{|g| > 1/k\}$ por lo tanto $E_k \subseteq \{|g| > 1/k\}$ y como $\mu\left(\{|g| > 1/k\}\right) \leq k \int_X |g| d\mu < \infty$, tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, nuestros conjuntos E_k son de medida finita. Por Egorov, para cada k, existe $A_k \subseteq E_k$ tal que f_n converge uniformemente sobre A_k y $\mu\left(E_k \setminus A_k\right) < \epsilon 2^{-k}$. Sea $A = \bigcup_k A_k \bigcup\{f_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos ahora que

$$\mu\left(X \setminus A\right) \leq \mu(\bigcup_k E_k \setminus \bigcup_k A_k) \leq \sum_k \mu\left(E_k \setminus A_k\right) \leq \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \epsilon$$

Y f_n converge uniformemente sobre A, como queriamos ver.

(4) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ una sucesión creciente de funciones medibles definidas en un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $f_k(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in E$. Supongamos además que f_1 es integrable. Probar que entonces f es integrable en E si y sólo si f_k es integrable para todo k y $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k < \infty$.

Demostración:

Supongamos primero que f es integrable. Para ver que las f_k son integrables basta notar que $f_k^+(x) \leq f^+(x)$ para casi todo $x \in E$, de donde $\int_E f_k^+ \leq \int_E f^+ < +\infty$ y además $f_k^-(x) \leq f_1^-(x)$, de donde $\int_E f_k^- \leq \int_E f_1^- < +\infty$. Ahora, como la sucesión $\{f_k\}$ es creciente, entonces $f - f_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$. Además $f - f_k \to 0$ en casi todo punto de E. Como $0 \leq f - f_k \leq f - f_1$ y $f - f_1$ es integrable (porque f y f_1 lo son), por el teorema de convergencia mayorada vale que

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f < \infty.$$

Para la otra implicación, supongamos que $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k < \infty$. Usando de nuevo que $f_k - f_1 \geq 0$ y $\lim_{k\to\infty}(f_k - f_1) = f - f_1$ en casi todo punto de E, por el lema de Fatou tenemos que

$$0 \leq \int_E \lim_{k\to\infty} (f_k - f_1) \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k - \int_E f_1 < \infty$$

Por lo tanto, f es integrable.