Práctica 8: Teorema de Radon-Nikodym y Medidas de Probabilidad

Ejercicio 1. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ), tal que por lo menos una de ellas es finita. Si $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$, $(E \in \Sigma)$, probar que ν es una medida con signo.

Ejercicio 2. Sea ν una medida con signo. Probar:

(a) Si P es un conjunto positivo con respecto a ν y $A \subset P$, entonces A es un conjunto positivo con respecto a ν.

(b) Si $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ son conjuntos positivos con respecto a ν, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ también lo es.

Ejercicio 3. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $\Omega = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \mathcal{F}$, probar:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$.

Ejercicio 4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y f tal que existe $\int_\Omega f d\mu$. Si $\nu(E) = \int_E f d\mu\, , E \in \mathcal{F}$, probar que:

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu \ , \ \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$$

Ejercicio 5.

(a) Sean λ y μ medidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\lambda(\Omega) < \infty$. Probar:

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow \ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(\Omega) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

Ejercicio 6. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \delta)$ donde $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

(a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x) dx \qquad (\forall\, A \in \mathcal{M}).$$

(b) Dada $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

Ejercicio 7. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ) . Si para todo $\epsilon > 0$ existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \varnothing, \;\; A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \; \mu(A_\epsilon) < \epsilon \; y \; \nu(B_\epsilon) < \epsilon \; ,$$

probar que existen $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \varnothing, \;\; A \cup B = X, \; \mu(A) = 0 = \nu(B).$$

Ejercicio 8. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f \, d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 9. Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada finita definidas en $\mathcal{F}$, tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\mu \quad \forall f \text{ medible tal que} \int f \, d\nu \text{ existe .}$$

(b) Probar que $\{x \in \Omega : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 10. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean μ y ν dos medidas finitas en $(\Omega, \mathcal{F})$. Definimos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\bar{\mu} = \mu + \nu$.

(a) Probar que existe una función $f \in L^1(\bar{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\bar{\mu}$ y que $0 \leq f \leq 1$ $\bar{\mu} - a.e.$

(b) Deducir que $\int g \, d\nu = \int gf \, d\bar{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

(c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$ para todo $E \in \mathcal{F}$ entonces $h = \dfrac{f}{1-f}$ $\mu - a.e.$
Sugerencia: reescribir el item (b) como $\int g(1-f)d\nu = \int gf d\mu$ y elegir una g adecuada.

Ejercicio 11. Sea μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mu(-\infty, x]$. Probar:

(a) $\mu \ll m$ si y solo si f es absolutamente continua y en ese caso $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(b) $\mu \perp m$ si y solo si $f' = 0$ a.e.

Ejercicio 12. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, considerar la medida μ_X definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}^n$, por

$$\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A)) \ .$$

Probar que para toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable respecto de μ_X, y para todo boreliano $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ vale,

$$\int_A f(y)\, d\mu_X \ = \ \int_{X^{-1}(A)} f(X)\, d\mu \ .$$

Ejercicio 13. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad , $(X, Y)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio y P_{XY} la medida inducida por (X, Y) sobre los borelianos de $\mathbb{R}^2$. Probar que si $P_{XY} \ll m$, siendo m la medida de Lebesgue, entonces P_X y P_Y también lo son y hallar sus funciones de dendidad , esto es, sus derivadas de Radon-Nikodym respecto de m .

Ejercicio 14. Sea $X = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Sea $\sigma(X)$ la σ-álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\sigma(X)$.

(b) Probar que si la variable aleatoria Y es $\sigma(X)$-medible entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i. Concluir que Y puede expresarse como función de X.

Ejercicio 15. Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de los borelianos de Ω y P la medida de Lebesgue. Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Definimos en $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ las siguientes variables aleatorias

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \qquad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$

Probar que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.

Ejercicio 16.

(a) Dados un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ y una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ tal que $\int_\Omega f\, dP = 1$, sea ν la medida definida sobre $(\Omega, \mathcal{U})$ por

$$\nu(A) = \int_A f\, dP \ .$$

Probar que $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$ es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\nu-$integrable, vale que

$$\int_\Omega g\, d\nu = \int_\Omega g\, f\, dP \ .$$

(b) En particular, sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria y supongamos que μ_X tiene función de densidad f. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$Y = g(X)$$

es integrable. Mostrar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx.$$

Ejercicio 17. Sea $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Hallar

(a) $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$

(b) $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$, $B \in \mathcal{F}$

(c) $E(X|Y)$ con Y una variable aleaotoria que toma los valores y_i con probabilidad p_i, $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 18. Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$. Probar que

$$E(X|Y) = \Phi(Y), \qquad \text{con} \qquad \Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\, dx.$$

Sugerencia:

(a) $\Phi(Y)$ es $\sigma(Y)$-medible.

(b) Sea $A \in \sigma(Y)$ y sea B un boreliano de $\mathbb{R}$ tal que $A = Y^{-1}(B)$.

Probar que

1. $\int_A X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B x f_{XY}(x,y)\, dydx.$
2. $\int_A \Phi(Y)\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B \Phi(y) f_{XY}(x,y)\, dydx.$
3. $\int_A X dP = \int_A \Phi(Y)\, dP$, para todo $A \in \sigma(Y)$.