Práctica 2: Medida en Espacios Abstractos

Ejercicio 1. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar medida de contar o *counting measure*.

(b) Dado $x_0 \in X$,para cada $E \subset X$, definimos $\delta(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida se denomina delta de Dirac.

(c) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $A \in \Sigma$. Para cada $E \in \Sigma$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en Σ.

(d) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, \ldots, a_n$ constantes positivas. Probar que

$$\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$$

es una medida.

(e) Sea (X, Σ) un espacio medible y sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas en este espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$

probar que μ es una medida.

(f) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $E \in \Sigma$ definimos

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$

Probar que μ_0 es una medida. Probar además que cumple la siguiente propiedad: para cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $F \in \Sigma$ contenido en E y de medida finita.

Ejercicio 2. Sean (X, Σ) un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $A, B \in \Sigma \;\wedge\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $A_n \in \Sigma \; (n \in \mathbb{N}) \;\wedge\; A_n \searrow \emptyset \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta que $Y \in \Sigma$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \Sigma$ y $\mu(E_1 \vartriangle E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Ejercicio 4. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida (X, Σ, μ).

(a) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$

(b) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$

Ejercicio 5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea

$$\overline{\Sigma} = \{A \subseteq X\ : A = E \cup M\,;\ E \in \Sigma, M \subseteq N \in \Sigma\,, \mu(N) = 0\}$$

Sobre $\overline{\Sigma}$ se define $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$, si $A = E \cup M$, como en la definición de $\overline{\Sigma}$. Probar:

(a) $\overline{\Sigma}$ es una σ-álgebra.

(b) $\overline{\mu}$ está bien definida sobre $\overline{\Sigma}$.

(c) $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completa.

Ejercicio 6. Sea μ una medida definida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$ tal que μ toma valores finitos sobre los conjuntos compactos. Sea $\mathcal{H}$ la clase de los conjuntos borelianos E que satisfacen:

(a) $\mu(E) = \inf \{\mu(G), G \supseteq E\,, G\,\text{abierto}\}$.

(b) $\mu(E) = \sup \{\mu(K), K \subseteq E\,, K\,\text{compacto}\}$.

Probar:

(i) Los abiertos y los compactos están en $\mathcal{H}$.

(ii) Si μ es finita, $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra.

(iii) $\mathcal{H}$ coincide con la σ-álgebra de Borel.