

Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2015

Operadores compactos – Operadores de Fredholm

- Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Son equivalentes
 - T es compacto.
 - $\overline{T(A)}$ es compacto, para todo conjunto acotado $A \subset E$.
 - Para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ acotada, $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.
- Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T es compacto entonces $\forall x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ se verifica que $T(x_n) \rightarrow T(x)$.
- Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T es compacto, $R(T)$ es separable.
- Sea E un espacio de Banach. Si $\dim E = \infty$, $Id : E \rightarrow E$ no es compacto.
 - Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim E = \infty$ y T es compacto, entonces T no es inversible.
- Sea $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
 - T es compacto si y sólo si $\alpha_n \rightarrow 0$
 - $R(T)$ es cerrado si y sólo si $(\frac{1}{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada (considerando sólo los n tales que $\alpha_n \neq 0$).
- Sea E un espacio de Banach reflexivo. Probar que todo operador $T : E \rightarrow \ell_1$ es compacto.
- Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, F) = \{T : E \rightarrow F / T \text{ es compacto}\}$.
 - Si existe $S \subset R(T)$ subespacio cerrado entonces $\dim S < \infty$.
 - Si $R(T)$ es cerrado entonces $\dim R(T) < \infty$.
 - Si $\dim E = \infty$, entonces existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$ y $Tx_n \rightarrow 0$. (Sug: T acotado inferiormente $\Rightarrow R(T)$ cerrado)
- Si $T \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)$ entonces T es compacto.
 - Sea $i : \ell^1 \rightarrow \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?
 - Probar que la inclusión, $i : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ es compacta. ($\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$). Sugerencia: teorema de Arzela-Ascoli.
- Sean $k \in C([a, b] \times [a, b])$ y $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ el operador integral con núcleo k , dado por

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y) dy$$

Probar que K es un operador lineal acotado y compacto.

¿Qué sucede si se reemplaza $[a, b]$ por \bar{U} con U abierto y acotado en \mathbb{R}^n ?

10. Sean $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ y $K \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$ el operador integral con núcleo k . Probar que:
- Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0, 1])$, entonces $(e_{nm}(x, y) = e_n(x)\overline{e_m(y)})_{n, m \in \mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0, 1] \times [0, 1])$.
 - Si $k(x, y) = \sum_{i, j=1}^N \alpha_{ij} f_i(x) g_j(y)$, con $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $f_i, g_j \in L^2([0, 1])$ entonces $\dim R(K) \leq N$.
 - Si $k_n \rightarrow k$ en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$, entonces $K_n \rightarrow K$ en $\mathcal{L}(L^2([0, 1]))$.
 - Si $k(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} \alpha_{nm} e_n(x) \overline{e_m(y)}$ y $k_N(x, y) = \sum_{n, m=1}^N \alpha_{nm} e_n(x) \overline{e_m(y)}$, entonces $k_N \rightarrow k$ en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$.
 - Deducir de todo lo anterior que K es compacto.
11. Sean E y F espacios de Banach. Si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall K \subset F$ compacto $\exists T \in \mathcal{L}(F)$ tal que $\dim R(T) < \infty$ y $\sup_{x \in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$, entonces para todo operador $A \in \mathcal{K}(E, F)$ existen operadores $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que $\dim R(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $A_n \rightarrow A$.

Definición:

- Sean E un espacio de Banach y $S \subseteq E$ un subespacio cerrado. Llamamos codimensión de S en E a la dimensión del espacio E/S y notamos por $\text{codim}(S)$ a dicha dimensión.
- Sean E y F dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se dice que T es un operador de Fredholm si
 - $\dim(\ker(T))$ es finita.
 - $R(T)$ es cerrado y $\text{codim}(R(T))$ es finita.
- Sean E y F dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador de Fredholm. Llamamos índice de T y notamos por $\text{ind}(T)$ al número $\dim(\ker(T)) - \text{codim}(R(T))$.

12. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \rightarrow F$ un operador de Fredholm, probar que $\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \dim(\ker(T^*))$.
13. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \rightarrow F$ un operador de Fredholm, probar que si $\dim(\ker(T^*)) = 0$ entonces $Tx = y$ tiene por lo menos una solución $\forall y \in F$.
14. (a) Considerar $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ el operador Shift y T su inverso a izquierda, mostrar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.
- (b) Para S y T como en (a) mostrar que S^k y T^k también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.
- (c) Sea $T : E \rightarrow F$ un operador de rango finito, con E y F espacios de Banach. ¿Es T un operador de Fredholm?
- (d) Sea $A : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ definido por $Ax(t) = \int_0^t x(s) ds$. ¿Es A un operador de Fredholm?

15. Probar que $f(x) - \int_0^\pi \sin(x+y)f(y) dy = g(x)$ tiene única solución $\forall g \in L^2[0, \pi]$