Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2015

Práctica 7

Topologías débiles 2

1. (a) Si E es un espacio vectorial, $f_1, \ldots, f_n, f : E \to \mathbb{C}$ son transformaciones lineales tales que $\cap_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$, entonces $f \in \langle \{f_i\}_i \rangle$

   (b) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y w^*-continua, entonces existen $c > 0,\ x_1, \ldots, x_n \in E$ tales que
   $$|f(\varphi)| \leq c \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi(x_i)| \qquad \forall \varphi \in E'$$

   (c) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y w^*-continua, entonces existe $x \in E$ tal que $f(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in E'$

2. Sean E y F espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F'$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}$ está acotada.

3. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E'$.

   (a) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0\ / \varphi(x) = \|\varphi\|\ \|x\|$

   (b) Si M es un subespacio cerrado propio de E', $\exists x \in\ {}^{\circ}M,\ \|x\| = 1\ /\ \varphi(x) = d(\varphi, M)$

4. (a) Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable, entonces E es separable. (Sug: Si $\{\varphi_n\}$ es denso numerable en $\{\varphi \in E' / \|\varphi\| = 1\}$, tomar $\{x_n\} \in E$, $\|x_n\| = 1$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{3}{4}$ y ver que $\langle \{x_n\} \rangle$ es denso en E)

   (b) Dar un ejemplo de E separable tal que E' no sea separable.

5. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que E es separable si y sólo si S y E/S lo son.

6. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ w^*-convergente.

   (Sug: Si $\{x_k\}$ es denso en E, $\{\varphi_n(x_1)\}_n$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_1}(x_1)\}_{n_1}$, también, $\{\varphi_{n_1}(x_2)\}_{n_1}$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_2}$, seguir inductivamente y ver que $\{\varphi_{n_n}\}_n$ es w^*-convergente)

7. Sea E un espacio de Banach reflexivo.

   (a) Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E, entonces tiene una subsucesión $w-$convergente. (Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S' es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)

   (b) Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E', entonces tiene una subsucesión w^*-convergente.

8. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E'$, $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.

9. Sea E un espacio de Banach separable, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en B_E. Probar que la topología débil* en $B_{E'}$ puede darse mediante la métrica

$$d(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{2^n}$$

10. Sean E un espacio de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas finitas de $\{x_n\}$ que tiende a x en norma ("lema de Mazur").