Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2015

Práctica 6

Topologías débiles 1

1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ para la topología τ es una familia de elementos de τ tal que cualquier elemento de τ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

   a) Dada una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes propiedades:

      i) Cada punto de X está en algún elemento de $\mathcal{B}$

      ii) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

      Probar que $\mathcal{B}$ es base de una única topología en X.

   b) Sea E un espacio de Banach. Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in E'$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos de la forma

   $$U(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\gamma_i(x) - \gamma_i(x_i)| < \varepsilon\}$$

   Probar que estos conjuntos son una base para la topología débil w de E.

   c) Encontrar una base de la topología débil* en E'.

2. a) Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia tal que cubre a X. Probar que las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ resultan una base de la menor topología que contiene a $\mathcal{S}$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una sub-base de dicha topología.

   b) Sea E un espacio de Banach. Sea $x \in E$, $\gamma \in E'$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{S}$ la familia de los conjuntos de la forma

   $$V(\gamma, x, \varepsilon) = \{y \in E : |\gamma(y) - \gamma(x)| < \varepsilon\}$$

   Probar que es una sub-base de la topología débil w de E.

   c) Encontrar una sub-base de la topología débil* en E'.

3. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua en un punto $x \in X$ si dado un abierto $V \in \tau_Y$ tal que $y = f(x) \in V$ existe un abierto $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. Se dice que f es continua si es continua en todos los puntos de X.

   a) Probar que f es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si para toda red $(x_i)_{i \in I}$ en X tal que $x_i \to x$ se tiene que $f(x_i) \to f(x)$.

   b) Probar que f es continua si y sólo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$ para todo $V \in \tau_Y$.

4. a) Sea X un conjunto e $(Y_i, \tau_{Y_i})_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I} : X \to (Y_i, \tau_{Y_i})$ una familia de funciones. Probar que existe una menor topología τ en X que hace a todas las funciones $(f_i)_{i \in I}$ continuas. $\tau_{\mathcal{F}}$ se llama la topología inicial respecto de la familia (f_i).

   b) Probar que la topología inicial $\tau_{\mathcal{F}}$ está caracterizada por la siguiente propiedad universal: Todas las $(f_i)_{i \in I}$ son continuas y si (Z, τ_Z) es otro espacio topológico y $g : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_{\mathcal{F}})$ es una función, entonces g es continua si y sólo si $f_i \circ g$ es continua para todo $i \in I$.

   Notar que para un espacio normado E, la topología débil en E es la inicial respecto de la familia de todas las funcionales lineales continuas sobre E.

5. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{x = (x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\}$$

el producto cartesiano. Sean $\pi_i : X \to X_i$ las proyecciones $\pi_i(x) = x_i$. La topología producto en X es la topología inicial respecto a las proyecciones. Si todos los X_i son iguales ($X_i = Z$) escribimos $\prod_{i\in I} X_i = Z^I$.

   (a) Probar que la convergencia de una red en la topología producto está dada por la convergencia puntual (o sea la convergencia en cada coordenada).

   (b) Probar que los conjuntos de la forma

   $$\{x \in X : x_i \in U\}$$

   donde U es abierto en X_i para algún $i \in I$ forman una sub-base de la topología producto en X. Indicar cuál es la base correspondiente.

   (c) Sea E un espacio de Banach. Probar que la topología débil en E coincide con la topología de subespacio del producto $\mathbb{K}^{E'}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) (pensando a puntos de E como funciones sobre E'). Sugerencia: la composición de dos familias iniciales es una familia inicial.

6. Sea E un espacio de Banach, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que $\|x_n\|$ está acotada y que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

   (Sugerencia: usar principio de acotación uniforme).

7. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

8. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$.

   (a) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.

   (b) Si $\dim E < \infty$, $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

9. (a) Sea E un espacio de Banach, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal. φ es continua si y sólo si φ es continua de (E, w) en $\mathbb{C}$.

   (b) Sean E y F espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. T es continua si y sólo si T es continua de (E, w) en (F, w).

10. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$.

11. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, sea $S = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. En (E, w), S tiene interior vacío.

12. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.

13. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

14. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$.

   (a) $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

   (b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

15. Definamos $\varphi_n : l^p \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

   (a) Si $p \in [1, \infty)$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. ¿$\varphi_n \to 0$?

   (b) Si $p = \infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión w^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, w^*)$ es compacta?

16. Sean $\varphi_n : C([-1,1]) \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(f) = f\left(\frac{-1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

17. Si $1 \leq p < \infty$, sea $e^n \in \ell^p$ dado por $(e^n)_k = \delta^n_k$. Probar que:

   (a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

   (b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{w^*} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

18. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces

$$x^n \xrightarrow{w} x \Longleftrightarrow \sup \|x^n\|_p < \infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x^n_k = x_k \quad \forall k$$

19. (a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces

$$\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Longleftrightarrow \sup \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\, dt \to \int_0^a \varphi(t)\, dt \quad \forall a \in [0,1]$$

   (b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

20. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0,1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \Longleftrightarrow M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{w} M_\varphi(f) \quad \forall f \in L^2[0,1]$$

21. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\|\ \|_\infty$ pero no en la topología w^*.

22. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

   (a) Probar que $\varphi_n \in c_0'$ y calcular su norma.

   (b) Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ y que $\varphi_n \not\xrightarrow{w} 0$.

   (c) $c_0 \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1, \varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\rangle \supset \ \ldots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿Ocurre lo mismo con ${}^\circ\langle\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty\rangle$?