Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2015. Práctica 5

Teoremas de la aplicación abierta y gráfico cerrado

1. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T^*)$ es cerrado y
$$R(T^*) = (\ker(T))^\perp$$

2. Sea E un espacio de Banach, A y B subespacios cerrados tales que $E = A \oplus B$. Probar que E es isomorfo a $A \times B$ con la norma $\|(a, b)\| = \|a\| + \|b\|$.

3. Sea E un espacio de Banach, sea $P : E \to E$ lineal tal que $P^2 = P$, sean $S = \ker(P), T = R(P)$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si S y T son cerrados.

4. Sean E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que existe T cerrado tal que $E = S \oplus T$ si y solo si existe $P : E \to E$ proyección continua sobre S.

5. Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\exists\, Q \in \mathcal{L}(E)/\ Q^2 = Q,\ R(Q) = S$.

6. Sea X un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Si $\|x_n\|_1 \to 0$ implica que $\|x_n\|_2 \to 0$, entonces las normas son equivalentes.

   Definición: Sea E, F dos espacios de Banach, $T : D(T) \subset E \to F$ un operador lineal no acotado (donde $D(T)$ denota el dominio de T). Decimos que T es cerrado si $x_n \in D(T)$, $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, implican que $x \in D(T)$ y $T(x) = y$.

7. (a) T es cerrado si y sólo si $G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}$ es cerrado en $E \times F$.
   (b) T es cerrado si y sólo si $D(T)$ resulta un espacio de Banach con la norma $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.
   (c) Si T es cerrado y $D(T)$ es cerrado, entonces $T \in \mathcal{L}(D(T), F)$.
   (d) Probar que el operador $T : D(T) = C^1[0, 1] \subset C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por $T(x) = x'$ es cerrado.