Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2015

Práctica 3

Funcionales lineales - Teorema de Hahn-Banach

1. Sean E un espacio de Banach, $\varphi \in E^*$, $\varphi \not\equiv 0$, $y \in E$, $y \notin \ker\varphi$. Probar que:

   (a) $E = \ker\varphi \oplus \langle y\rangle$, donde $\langle y\rangle$ significa el subespacio generado por y.

   (b) $d(y, \ker\varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$

   (c) Si $H = \{x \in E : \varphi(x) = c\}$ entonces $d(0, H) = \frac{|c|}{\|\varphi\|}$.

2. (a) Demostrar que en un espacio vectorial normado de dimensión finita toda funcional lineal es continua.

   (b) Sea $L_0(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $f(t) = 0\ \forall t \notin [a, b]$. Demostrar que $(L_0(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ es un espacio vectorial normado. Además, si definimos $\varphi : L_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \int f(t)\ dt$ probar que φ resulta una funcional lineal no acotada.

3. Sea en c_0 la familia $\{e^n\}_{n\geq 1}$ de sucesiones definidas por $e^n_i = \delta_{ni}$ y sea x^0 la sucesión dada por $x^0_i = \frac{1}{i}$

   (a) Verificar que $A = \{x^0, e^1, e^2, \ldots, e^n, \ldots\}$ es un conjunto l.i. de c_0

   (b) Sea B una base algebraica de c_0 que contenga a A. Notemos $\{b^j\}_{j\in J}$ al conjunto $B \setminus A$.

   Luego todo $x \in c_0$ se escribe de manera única como

   $$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i\in J} \alpha_j b^j$$

   donde los coeficientes son nulos salvo finitos.

   Si $f : c_0 \to \mathbb{C}$ se define por $f(x) = \alpha_0$, probar que f es una funcional lineal no continua.

4. Probar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una funcional lineal no continua.

5. Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi, \psi \in E^*$ tales que $\varphi.\psi \equiv 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$.

6. (a) Sea $y \in \ell^1$. Si definimos $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ por

   $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$$

   resulta $\varphi \in {c_0}^*$ con $\|\varphi\|_{c_0^*} = \|y\|_1$.

   (b) Recíprocamente, dada $\varphi \in c_0^*$, mostrar que la sucesión dada por $y_n = \varphi(e_n)$, donde $e_n = (\delta^n_k)_{k\geq 1}$ pertenece a ℓ^1.

   (c) Probar que las aplicaciones definidas en (a) y (b) son mutuamente inversas y deducir que $c_0^* \cong \ell^1$ (isomorfismo isométrico).

(d) De manera análoga, probar que $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ y que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

7. (a) Caracterizar el dual de c.

   (b) Sea $\varphi : c \to \mathbb{C}$ la funcional $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ y sea $\widetilde{\varphi} : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ una extensión dada por el teorema de Hahn-Banach. Probar que $\widetilde{\varphi}$ no puede representarse en la forma:
$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n, \text{ con } y \in \ell^1.$$

8. Sea E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado.

   (a) Si S tiene dimensión finita, probar que S es complementado.

   (b) idem (a) si S tiene codimensión finita.

9. (a) Sea E un espacio vectorial normado, entonces para todo $x \in E$
$$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \ \|\varphi\| = 1\}$$

   (b) Sea E un espacio vectorial normado, sean $x, y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$ para toda $\varphi \in E^*$, entonces $x = y$.

10. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio, $x \in E$ tales que $d = d(x, F) > 0$. Entonces existe $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x) = d$ y $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in F$.

11. Sea E un Banach y S un subespacio de E. Si S no es denso en E entonces existe $\phi \in E^*$, $\phi \neq 0$ tal que $\phi\,|_S \equiv 0$.

12. Probar que existe una funcional lineal $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

    (a) $\|L\| = 1$.

    (b) Si $x \in \ell^\infty$ y $T(x) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$, entonces $L(x) = L(Tx)$.

    (c) Si $x \in c$, entonces $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

    (d) Si $x \in \ell^\infty$ y $x_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $L(x) \geq 0$.

    Sugerencia: Definir L inicialmente sobre el subespacio $S \oplus \langle u \rangle$, siendo $S = \{x - T(x) : x \in \ell^\infty\}$ y $u = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, y extenderla.

13. Sean E y F espacios vectoriales normados, probar que existe un isomorfismo entre $(E \times F)^*$ y $E^* \times F^*$.

14. Sea E un Banach y S un subespacio de E, probar que
$$\overline{S} = \cap\{\ker(\phi)/\phi \in E^* \; S \subset \ker(\phi)\}.$$

15. Sea E un espacio vectorial normado, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Un punto y_0 es límite de combinaciones lineales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si para toda $\varphi \in E^*$ que verifique que $\varphi(x_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.