Análisis Funcional - Primer Cuatrimestre 2015

Práctica 1

Espacios de Banach

1. (a) Si $1 \leq p \leq \infty$, $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado (más aún: si $p < \infty$, es denso).
   (b) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio, entonces $\overline{S}$ es un subespacio.
   (c) Mostar que $\ell^p \subset \ell_\infty$. Calcular $\overline{\ell^p}$ en ℓ^∞.
   (d) Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado de E, entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $B \subset V$ un subconjunto que satisface las siguientes propiedades:

   (a) $0 \in B$
   (b) B es convexo.
   (c) Si $x \in B$ y $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda \cdot x \in B$.
   (d) Para todo $x \in V$, $x \neq 0$, existen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que $\lambda_1 x \in B$, $\lambda_2 x \notin B$.
   (e) Si $x_n = \lambda_n x \in B \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(0 \leq \lambda_n \leq 1)$ y $\lambda_n \to 1$, entonces $x \in B$.

   entonces, si definimos

$$\|x\| = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B\right\}$$

   V resulta un espacio normado, y $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$.

3. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

   (a) E es Banach
   (b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo
   (c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo

   Definición: Sean E un espacio vectorial, $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ dos normas definidas sobre E. Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si $\exists a, b > 0 / \|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \ \ \forall x \in E$.

4. (a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.
   (b) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.
   (c) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre E hace de E un espacio de Banach.
   (d) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces S es cerrado.

5. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión finita, demostrar que $B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta.

6. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F$ $\exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea

$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Sugerencia. Ver que $y_0 \in S = \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$.

7. *Lema de Riesz:* Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio cerrado propio ($F \neq E$), $0 < a < 1$, entonces $\exists x_a \in E$, $\|x_a\| = 1$ tal que $d(x_a, F) \geq a$.

8. Sea E un espacio vectorial normado, $B(0,1)$ es compacta si y sólo si $\dim E < \infty$.

9. (a) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio. S tiene interior no vacío si y sólo si $S = E$.
   (b) Sea E un espacio vectorial. Probar que posee una base algebraica.
   (c) Probar que un espacio de Banach E de dimensión infinita no puede tener una base (algebraica) numerable (en otras palabras, $\dim E > \aleph_0$).
   (d) Probar que todo espacio vectorial se lo puedo normar.
   (e) Probar que todo espacio vectorial de dimensión infinita posee dos normas no equivalentes.

10. Demostrar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

11. Sea E un espacio vectorial normado, E es de Banach si y sólo si $\forall (x_n)_n \subset E$ vale que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

12. Sean E y F espacios vectoriales normados. En $E \times F$, definimos $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$.
   (a) $(E \times F, \|\ \|)$ es un espacio vectorial normado.
   (b) Si E y F son espacios de Banach, $E \times F$ resulta un espacio de Banach.
   (c) La inyección $J_E : E \to E \times F$ dada por $J_E(x) = (x, 0)$ y la proyección $P_E : E \times F \to E$ dada por $P_E(x,y) = x$ son ambas continuas. Lo mismo vale para J_F y P_F.

13. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.
   (a) Probar que E/S es un espacio vectorial.
   (b) Si definimos en E/S la norma $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x, S)$, probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.
   (c) Si $\Pi : E \to E/S$ es la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$, ver que Π es lineal, que $\|\Pi\| = 1$ y que Π es abierta.
   (d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

14. Probar que la norma de $[x]$ (la clase de una sucesión $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en ℓ^∞ / c_0) coincide con $\limsup_{n \to \infty} |x_n|$.

15. Sean E un espacio de Banach, $S, T \subset E$ subespacios cerrados con $\dim T < \infty$ entonces $S + T$ es cerrado.

16. (a) Sea K un espacio métrico (topológico) compacto, entonces $C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \text{ continuas}\}$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

(b) Si K es un compacto de $\mathbb{C}^n$, $C(K)$ es separable.

17. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por Ω entendemos un abierto acotado en $\mathbb{R}^N$.

(a) $C^1(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty$.

(b) $C^r(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty + \cdots + \sum \|f_{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}}\|_\infty$ $(r \in \mathbb{N})$.

(c) $Lip(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.

(d) $C^\alpha(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\quad 0 < \alpha < 1$. ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?

(e) El Espacio de las Funciones de Variación Acotada.

$$BV([0,1]) = \{f \in C([0,1]) / \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}$$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$

18. Sean E y F espacios normados, $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(i) T es continuo.

(ii) T es continuo en 0.

(iii) T es acotado (i.e. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$)

19. Sean E y F espacios normados, $T : E \to F$ lineal. Entonces

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E,\ x \neq 0\} \end{aligned}$$

y $\quad \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$

20. Sean $(E, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$, según sea el cuerpo de escalares de E) una forma lineal. Probar φ es continua si y sólo si $\ker\varphi$ es cerrado.

21. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

(a) $\varphi : c \to \mathbb{C}$, $\ \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$

(b) $\varphi : L^2[-1,1] \to \mathbb{C}$, $\ \varphi(f) = \int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$. $\qquad \varphi : C[-1,1] \to \mathbb{C}$, $\ \varphi(f) = \int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$

(c) $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = x_1 + x_2.$ $\qquad$ $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = x_1 + x_2$

(d) $\varphi : \ell^1 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}.$ $\qquad$ $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$

(e) $\varphi : c_0 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$

22. Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal tales que para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a 0, resulta $(\varphi(x_n))_n$ acotada. Demostrar que φ es continua.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Considerar a A como un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, utilizando en $\mathbb{R}^n$ la norma euclídea. Probar que $\|A\| = \max\{|\lambda| :\ \lambda$ es un autovalor de $A\}$.

24. **Operadores Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell^p \to \ell^p$, $T : \ell^p \to \ell^p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

(a) Probar que $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es inyectivo. Calcular $\|S\|$.

(b) Probar que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es suryectivo. Calcular $\|T\|$.

(c) $TS = I$, $ST \neq I$.

25. **Operadores de Multiplicación:**

(a) Si $\varphi \in C[0,1]$, sea $M_\varphi : C[0,1] \to C[0,1]$ definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

Probar que $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0,1])$ y calcular su norma.

(b) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, probar que M_φ, es un operador acotado de $L^p[0,1]$ en $L^p[0,1]$ y calcular su norma.

26. **Operadores integrales:** Si $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$, sea $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dado por

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\, dt$$

Probar que $K \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ y que $\|K\| \leq \|k\|_2$

27. Sea $\alpha = (\alpha_n)_n$ una sucesión de números complejos, $1 \leq p < \infty$, definimos $M_\alpha : \ell^p \to \ell^p$ por $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:

(a) M_α está bien definida $\Leftrightarrow\ \alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$

(b) M_α es inyectiva $\Leftrightarrow\ \alpha_n \neq 0\ \forall n$

(c) M_α es un isomorfismo $\Leftrightarrow\ (\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$

(d) $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$