FCEyN - UBA - 1er cuatrimestre 2015

Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

Sumatoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a) $1+2+3+4+\cdots+100$,
(b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$,
(c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)$,
(d) $1+9+25+49+\cdots+441$,
(e) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$,
(f) $n+2n+3n+\cdots+n^2$.

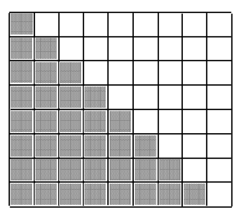
ii) Reescribir cada uno de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a) $5\cdot 6\cdots 99\cdot 100$, (b) $1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdots 1024$, (c) $n\cdot 2n\cdot 3n\cdots n^2$.

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$, iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$, iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$, v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$.

3. i) Probar que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$.

4. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$, ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$.

Inducción

5. Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$, $a^n-b^n=(a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la suma geométrica: para todo $a\neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

6. Sea $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$. Calcular

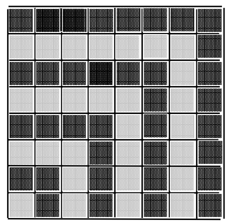
i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$, ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i)q^i$.

7. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3,

iii) usando el principio de inducción.

8. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

9. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1}$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$,

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$.

10. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+1}-a_1$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$),

iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\displaystyle\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

11. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i i}{(2i-1)(2i+1)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

12. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$,

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$,

iii) $3^n \geq n^3$,

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$,

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$.

vi) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$,

vii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$,

viii) $\displaystyle\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n}$.

13. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

14. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}$, $\forall\, n \geq 5$,

ii) $3^n - 2^n > n^3$, $\forall\, n \geq 4$,

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5$, $\forall\, n \geq 3$,

iv) $\displaystyle\binom{2n}{n} > n\, 2^n$, $\forall\, n \geq 4$.

v) $\sqrt{n} > \dfrac{3\sqrt{2}\ln(2n)}{\ln(2)}$, $\forall\, n \geq 2788$.

vi) $\dfrac{2^{2n}}{2n} > 2^{4n/3}(2n)^{\sqrt{2n}}$, $\forall\, n \geq 2788$.

15. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

i) la cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$,

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $\pi\,(n-2)$.

<u>*Recurrencia*</u>

16. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1} n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \displaystyle\binom{2n}{n}$.

17. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 3$, $\quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = n\, a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iv) $a_1 = 2$, $\quad a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = a_n + (n+1)^3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_1 = 3$, $\quad a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(Sugerencia: usar los Ejercicios 10(i), 8 y 9.)

19. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n\cdot n!, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\cdot i!$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = n^3$, y, aplicando el Ej. 10(i), calcular de otra manera $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (c.f. Ej. 8).

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

21. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

ii) $a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iii) $a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4\, a_{n+1} - 3\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

iv) $a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

v) $a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

vi) $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+2} = 6\, a_{n+1} - 9\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

22. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \dfrac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

23. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, a_i, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

ii) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\Big), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \ + (n+1), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

24. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\,a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2n}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \dfrac{1}{3^{n-1}}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$.

25. Se tienen 2^n monedas en apariencia idénticas. Una de ellas es falsa, y es más liviana que las auténticas (todas las auténticas tienen el mismo peso). Demostrar que se puede identificar la moneda falsa usando n veces una balanza de 2 platillos.

26. Sea $F_0 = 0, F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ la sucesión de Fibonacci.

Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$,

iii) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$,

iv) $\begin{cases} F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \\ F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1}), \end{cases}$

v) $F_{n+m} = F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m \quad \forall m \geq 0$.

vi) $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

27. Hallar la cantidad de sucesiones $b_1, \dots, b_n$ de $n \geq 2$ bits (es decir, $b_i \in \{0,1\}$), que no contienen dos 1 consecutivos (es decir, $0 \in \{b_i, b_{i+1}\} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$).

28. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de Fibonacci del Ejercicio 26. Probar que

$$F_{n+1} = \sum_{k \leq n/2} \binom{n-k}{k}.$$

i) Por inducción.

ii) Con el ejercicio anterior.

29. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$. Sugerencia: considerar la mayor potencia de 2 menor o igual a n.

30. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de Fibonacci. Probar que todo número natural m se puede escribir como suma de k números de Fibonacci

$$m = F_{n_1} + \ldots + F_{n_k}$$

para cierto $k \in \mathbb{N}$, con subíndices $n_1, \dots, n_k$ mayores que 1 y $n_i + 1 < n_{i+1}$, $\forall i < k$. Es decir, todo número natural puede escribirse como suma de distintos números no nulos de la sucesión de Fibonacci sin usar dos consecutivos. Probar además, que dicha representación es única.

31. Probar que todo $n \in \mathbb{N}$ puede escribirse como suma de números de la forma 2^a3^b tales que ninguno de ellos divide a otro. Sugerencia: para n impar considerar $3^k \leq n < 3^{k+1}$.

Combinatoria (2da Parte)

32. i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$?

ii) ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?

iv) ¿Y si se pide que 1 ó 2 pertenezcan al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

33. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

34. i) Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

ii) Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

35. Sea $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida en el Ejercicio 52 de la Práctica 1:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cap \{1,2,3\} = B \cap \{1,2,3\}.$$

¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A = \{1,3,5\}$?

36. Sea $X = \{1,2,\ldots,20\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida en el Ejercicio 53 de la Práctica 1:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A - B = \emptyset$$

¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A = 6$ y $A\,\mathcal{R}\,\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

37. En este ejercicio no hace falta usar inducción: se puede pensar en el significado combinatorio de $\binom{n}{k}$ (como la cantidad de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos). Probar que

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \ \forall\, n \geq 0.$

ii) $2^n \leq \displaystyle\binom{2n}{n} < 4^n, \ \forall\, n \geq 1.$

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 4^n, \ \forall\, n \geq 0.$

iv) $k\displaystyle\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \ \forall\, n \geq k \geq 1.$

v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}, \ \forall\, n \geq 1.$

vi) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}, \ \forall\, n,m,l \in \mathbb{N}.$

vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \ \forall\, n \geq 0.$

38. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ para todo $n \geq 1$.

39. Derivar a izquierda y derecha la igualdad $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ y evaluar lo obtenido en $x = 1$. ¿Qué se obtiene? (Comparar con el Ej. 37(v)).

Problemas surtidos

40. A un tablero de $2^n \times 2^n$ se le remueve un cuadradito. Probar que es posible cubrirlo usando fichas en forma de L formadas por tres cuadraditos, sin superponer fichas.

41. En cada planeta de un sistema hay un astrónomo observando al planeta más cercano. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Probar que si la cantidad de planetas es impar, entonces hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

42. Hay N personas que no se conocen entre sí. Se quiere que algunas de ellas sean presentadas de manera tal que no haya 3 personas que tengan la misma cantidad de conocidos. Demostrar que esto es posible para cualquier valor de N.

43. Se dibujan n rectas en el plano, de forma tal que no haya dos paralelas ni tres concurrentes. Probar que es posible colorear las regiones formadas con solamente dos colores, de forma tal que no haya dos regiones adyacentes con el mismo color.

44. En cierto país, todas las rutas son de sentido único. Cada par de ciudades está conectado por exactamente una ruta directa. Demostrar que existe una ciudad a la cual se puede llegar desde cualquier otra o bien directamente, o pasando a lo sumo por una ciudad.

45. Sea $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(x, y) = x + \binom{x+y-1}{2}$. Decidir si es biyectiva.

Sugerencia: Calcular $\#\{h(x, y) :\ x + y \leq N\}$ para todo $N \geq 1$.

46. Definimos la *media aritmética* de n números $a_1, \ldots, a_n$ reales positivos como

$$MA_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

y la *media geométrica* como

$$MG_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar la desigualdad *aritmético-geométrica* que afirma

$$MG_n(a_1, \ldots, a_n) \leq MA_n(a_1, \ldots, a_n)$$

y la igualdad sólo se da cuando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

i) Probarla para $n = 2$, es decir $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ y si $\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1+a_2}{2}$ entonces $a_1 = a_2$.

ii) Probar que si vale para n, también vale para $2n$.

iii) Probar que si vale para n, también vale para $n - 1$.

iv) Concluir que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

∗ **47**. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Probar el *principio de inclusión-exclusión*

$$\#\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\#I+1} \# \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

donde la suma recorre todos los subconjuntos no vacíos de $1, \ldots, n$.

i) Por inducción en n.

ii) Usando el Ejercicio 38.

∗ **48**. Probar que para todo $n \geq 6$ es posible dividir un cuadrado en n cuadrados más pequeños.

Sugerencia: Probar que si vale para n, vale para $n + 3$.

∗ **49**. Se marcan $2n$ puntos sobre una circunferencia. n se colorean de rojo y los restantes n de azul. Caminando sobre la circunferencia en sentido horario, se mantiene una cuenta de cuántos puntos rojos y azules se pasaron. Si en todo momento el conteo de puntos rojos es mayor o igual que el conteo de puntos azules, la caminata se dice exitosa. Probar que cualquiera sea la coloración inicial, es posible elegir un punto inicial que garantice una caminata exitosa.

∗ **50**. Sobre una pista circular hay k autos iguales. Entre todos, tienen nafta suficiente para completar exactamente una vuelta. Demostrar que existe un auto que puede completar una vuelta si recolecta la nafta de los otros autos durante su recorrida.

∗ **51**. Sean $\alpha, \beta > 1$ números irracionales tales que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Se definen las sucesiones $a_n = \lfloor \alpha n \rfloor$ y $b_n = \lfloor \beta n \rfloor$, $n \geq 1$. Probar que $\#\{n : a_n < N\} + \#\{n : b_n < N\} = N - 1$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Concluir que todo número natural pertenece a exactamente una de las dos sucesiones.

NOTA: $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} :\ n \leq x\}$, es decir, $\lfloor x \rfloor$ la *parte entera* de x.

∗ **52**. El objetivo de este ejercicio es probar que cualquier sucesión de números naturales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}$ con $1 \leq a_i \leq i$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$, contiene una subsucesión no decreciente de largo $n + 1$. Supongamos que vale para $n < N$, y que tenemos un contraejemplo para $n = N$.

i) Probar que $N(k) = \#\{i :\ 1 \leq i \leq 2^N,\ a_i = k\} < N - j$ donde $2^j < k$.

ii) Probar que $N(1) < N + 1$.

iii) Sabiendo que $2^N = \displaystyle\sum_{i=1}^{2^N} N(k) = N(1) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{2^i < k \leq 2^{i+1}} N(k)$, llegar a un absurdo.

<u>*Complejidad*</u>

53. <u>Cálculo de a^n para un número a dado y $n \in \mathbb{N}$</u>

Se asume un modelo ideal donde dados dos números b y c, se puede calcular $b \cdot c$ exactamente realizando una sola operación.

i) Algoritmo recursivo *secuencial*: Calcular las distintas potencias de a mediante

$$a^{k+1} = a \cdot a^k, \ \forall\, k \geq 1$$

Calcular a^8, a^{11} y a^{15} mediante ese algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizaron para calcularlos? ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^n?

ii) Algoritmo recursivo *dividir y conquistar*:

- Para n una potencia de 2, calcular a^n mediante

$$a^{2^1} = a \cdot a \quad , \quad a^{2^{k+1}} = a^{2 \cdot 2^k} = a^{2^k + 2^k} = a^{2^k} \cdot a^{2^k}, \ \forall\, k \geq 1.$$

  Calcular a^8 mediante ese algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^8? ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{2^k}?

- Para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, escribir n como suma de potencias de 2 (ver Ejercicio 29) y luego calcular a^n por multiplicación. Por ejemplo si $n = 11 = 1 + 2 + 2^3$, se obtiene

$$a^n = a^{1+2+2^3} = a \cdot a^2 \cdot a^{2^3}.$$

  ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{11}?
  Calcular a^{15} mediante ese algoritmo. ¿Cuántas operaciones se realizan para calcular a^{15}?

54. En este ejercicio se admite idealísticamente que sumar, multiplicar, dividir, y sacar raíz cuadrada requieren cada uno una sola operación. Comparar la cantidad de cuentas que se tienen que hacer para calcular el n-ésimo número de Fibonacci F_n usando por un lado la definición recursiva y por otro lado la fórmula general obtenida.

55. Pensar un algoritmo para calcular F_n en tiempo logarítmico usando el Ejercicio 26, ítem iv).

Algoritmos de ordenación de datos: Burbujeo, Merge sort y Quick sort

56. Burbujeo:

Dada una lista ordenada $(a(1),\dots,a(n))$ de n números reales, se la quiere ordenar de menor a mayor. Por ejemplo dada la lista $(4,3,5,7,2,9,1,8)$ se quiere obtener la lista $(1,2,3,4,5,7,8,9)$ haciendo comparaciones entre elementos ¿$a(i) < a(j)$? y en función de la respuesta intercambiando los elementos comparados.

El algoritmo siguiente, llamado "burbujeo", compara el 1er elemento de la lista con el 2do intercambiándolos si es necesario, luego pasa al 2do y hace lo mismo con el siguiente, luego al 3ro etc. hasta recorrer todos los elementos de la lista (una pasada). En una pasada por todos los elementos de la lista, el elemento más grande quedará entonces a la derecha ¿Por qué? Luego repite el procedimiento desde el comienzo hasta no haber producido ningún cambio en una pasada. En ese punto la lista estará ordenada ¿Por qué?

Por ejemplo la primera pasada del ejemplo de arriba da:

$$\begin{array}{lll}
\underline{4}\ \underline{3}\ 5\ 7\ 2\ 9\ 1\ 8 \ \to & 3\ \underline{4}\ \underline{5}\ 7\ 2\ 9\ 1\ 8 \ \to & 3\ 4\ \underline{5}\ \underline{7}\ 2\ 9\ 1\ 8 \ \to \\
3\ 4\ 5\ \underline{7}\ \underline{2}\ 9\ 1\ 8 \ \to & 3\ 4\ 5\ 2\ \underline{7}\ \underline{9}\ 1\ 8 \ \to & 3\ 4\ 5\ 2\ 7\ \underline{9}\ \underline{1}\ 8 \ \to \\
3\ 4\ 5\ 2\ 7\ 1\ \underline{9}\ \underline{8} \ \to & 3\ 4\ 5\ 2\ 7\ 1\ 8\ 9 &
\end{array}$$

i) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de esa lista? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar esa lista?

ii) ¿Cuántas comparaciones se usan en la primera pasada de una lista de n elementos? ¿Y en la segunda?

iii) ¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar una lista de n elementos?

57. Mergesort: Funciona en 3 etapas usando el importantísimo mecanismo de "dividir y conquistar". Por simplicidad lo vamos a aplicar aquí para listas de longitud 2^n:

i) "Divide": divide la lista en dos sublistas de tamaño 2^{n-1}.

ii) "Conquista": ordena cada sublista por separado (utilizando el mismo algoritmo para listas de tamaño 2^{n-1}).

iii) "Fusiona": fusiona en forma adecuada las dos sublistas en una sola.

Ejemplo: Sea la lista $(4,3,5,7,2,9,1,8)$ de longitud 2^3:

i) "Divide": divide la lista en las dos sublistas $(4,3,5,7)$ y $(2,9,1,8)$ de longitud 2^2.

ii) "Conquista": Aplica el algoritmo para estas dos sublistas (en forma recursiva, o sea partiendo cada una de ellas en dos sublistas de longitud 2) y termina obteniendo: $(4,3,5,7) \to (3,4,5,7)$ y $(2,9,1,8) \to (1,2,8,9)$.

iii) "Fusiona": fusiona inteligentemente las dos sublistas, como lo hacemos naturalmente sin pensar: Se compara el primer elemento de cada sublista, se pone el más chico primero, luego se compara los dos primeros elementos que quedaron (sin ese) de cada lista, y se repite el procedimiento hasta agotar. Para fusionar $(3,4,5,7)$ y $(1,2,8,9)$ se obtiene

$$\begin{array}{lcllcl}
\boxed{3}\ 4\ 5\ 7 & \text{y} & \boxed{1}\ 2\ 8\ 9 & \to & \boxed{1} \\
\boxed{3}\ 4\ 5\ 7 & \text{y} & \cancel{1}\ \boxed{2}\ 8\ 9 & \to & 1\ \boxed{2} \\
\boxed{3}\ 4\ 5\ 7 & \text{y} & \cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9 & \to & 1\ 2\ \boxed{3} \\
\cancel{3}\ \boxed{4}\ 5\ 7 & \text{y} & \cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9 & \to & 1\ 2\ 3\ \boxed{4} \\
\cancel{3}\ \cancel{4}\ \boxed{5}\ 7 & \text{y} & \cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9 & \to & 1\ 2\ 3\ 4\ \boxed{5} \\
\cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \boxed{7} & \text{y} & \cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9 & \to & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \boxed{7} \\
\cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{7} & \text{y} & \cancel{1}\ \cancel{2}\ \boxed{8}\ 9 & \to & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ \boxed{8} \\
\cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{7} & \text{y} & \cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{8}\ \boxed{9} & \to & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ \boxed{9}
\end{array}$$

Escribir el algoritmo en pseudocódigo y en algún lenguaje funcional.
¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar la lista original del ejemplo?
¿Cuántas comparaciones son necesarias para ordenar una lista de 2^n elementos?

58. **Quick sort:** Este algoritmo de ordenamiento es más rápido "en la práctica" que los anteriores. También utiliza el mecanismo de dividir y conquistar, eligiendo un pivote p en la lista (que puede ser el primer elemento, o elegido al azar, o de alguna otra manera): luego de una primera pasada el algoritmo colocará el pivote elegido en su lugar correcto en la lista, colocando todos los menores que él a su izquierda y todos los mayores a su derecha. Luego ordena las dos sublistas (de la izquierda y de la derecha) por separado. La forma establecida de colocar el pivote en su lugar correcto (que resulta más conveniente que cualquier forma ingenua) es aplicando lo que se llama "partitioning in place", trabajando con dos punteros, i por izquierda (que se mueve de izquierda a derecha) y d por derecha (que se mueve de derecha a izquierda) y compara los elementos correspondientes a esos punteros. Por convención el pivote p se intercambia con el elemento $a(n)$ de más a la derecha de la lista, para quedar él a la derecha. Se tiene entonces $p = a(n)$.

- Fijar los punteros i y d a la izquierda y a la derecha de la lista (sin el pivote).
- Incrementar i hasta que coincida con un elemento $a(i)$ mayor que p
- Disminuir d hasta que coincida con un elemento $a(d)$ menor que p.
- Intercambiar $a(i)$ y $a(d)$.
- Repetir hasta que i y d se crucen (es decir $i \geq d$).
- Intercambiar el pivote $p = a(n)$ con $a(i)$.

En el ejemplo anterior, si el pivote p elegido es el 4, primero se intercambia con el 8 de la derecha:

$$\boxed{4}\ 3\ 5\ 7\ 2\ 9\ 1\ 8 \rightarrow 8\ 3\ 5\ 7\ 2\ 9\ 1\ \boxed{4}$$

Y luego la primera pasada del algoritmo funciona de la manera siguente:

$$\overset{i}{\underline{8}}\ 3\ 5\ 7\ 2\ 9\ \overset{d}{\underline{1}}\ \boxed{4} \rightarrow \overset{i}{\underline{1}}\ 3\ 5\ 7\ 2\ 9\ \overset{d}{\underline{8}}\ \boxed{4} \rightarrow 1\ \overset{i}{\underline{3}}\ 5\ 7\ 2\ 9\ \overset{d}{\underline{8}}\ \boxed{4} \rightarrow$$

$$1\ 3\ \overset{i}{\underline{5}}\ 7\ 2\ 9\ \overset{d}{\underline{8}}\ \boxed{4} \rightarrow 1\ 3\ \overset{i}{\underline{5}}\ 7\ 2\ \overset{d}{\underline{9}}\ 8\ \boxed{4} \rightarrow 1\ 3\ \overset{i}{\underline{5}}\ 7\ \overset{d}{\underline{2}}\ 9\ 8\ \boxed{4} \rightarrow$$

$$1\ 3\ \overset{i}{\underline{2}}\ 7\ \overset{d}{\underline{5}}\ 9\ 8\ \boxed{4} \rightarrow 1\ 3\ 2\ \overset{i}{\underline{7}}\ \overset{d}{\underline{5}}\ 9\ 8\ \boxed{4} \rightarrow 1\ 3\ 2\ \overset{i\,d}{\underline{7}}\ 5\ 9\ 8\ \boxed{4} \rightarrow$$

$$1\ 3\ \overset{d}{\underline{2}}\ \overset{i}{\underline{7}}\ 5\ 9\ 8\ \boxed{4} \rightarrow 1\ 3\ \overset{d}{2}\ \overset{i}{\boxed{4}}\ 5\ 9\ 8\ 7$$

Entender cómo funciona este algoritmo.
Este algoritmo tiene la particularidad que "en promedio" funciona muy rápido (como el algoritmo merge, incluso más rápido), aunque para algunas listas iniciales requiere una cantidad de intercambios similar a la del algoritmo burbujeo.

Pensar ejemplos de listas iniciales en las que este algoritmo no es mejor que el de burbujeo.