Álgebra I
Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

<u>*Conjuntos*</u>

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V, denotaremos por A' al complemento de A respecto de V.

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) $3 \in A$
ii) $\{3\} \subseteq A$
iii) $\{3\} \in A$
iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$
v) $\{1, 2\} \in A$
vi) $\{1, 2\} \subseteq A$
vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$
viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$
ix) $\emptyset \in A$
x) $\emptyset \subseteq A$
xi) $A \in A$
xii) $A \subseteq A$

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

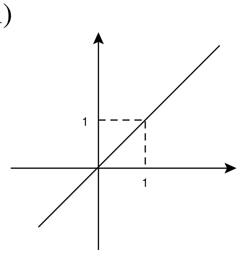
i) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
ii) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$
iv) $A = \{\emptyset\},\ B = \emptyset$

4. a) Describir a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

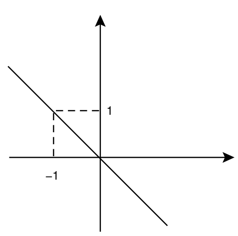
$$\{-3, 1, 5\} \quad , \qquad (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$$

b) Describir a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

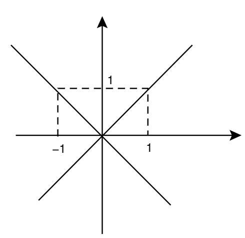
i)



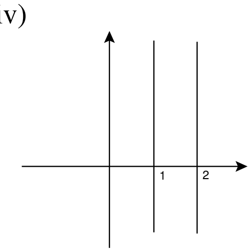
ii)



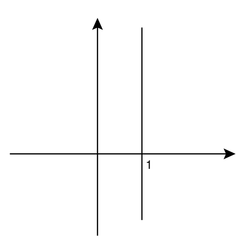
iii)



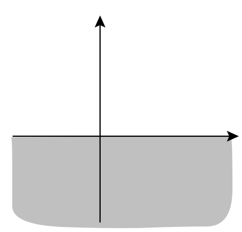
iv)



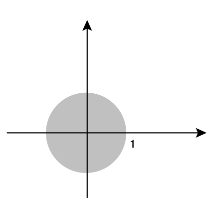
v)



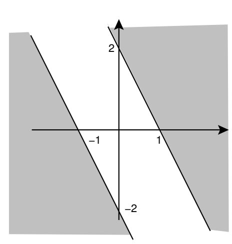
vi)



vii)



(*) viii)



5. Dados $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3, -5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \triangle B$.

6. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

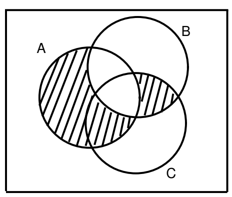
i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A' \cap B' \cap C'$

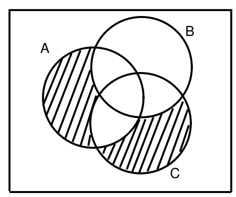
7. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)'$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)'$ en términos de uniones y complementos.

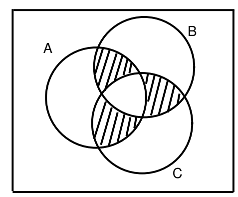
8. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

i) $(A \cup B') \cap C$ ii) $A \triangle (B \cup C)$ iii) $A \cup (B \triangle C)$

9. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

i) 

ii) 

iii) 

10. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A = \{1\}$ iii) $A = \{1, \{1, 2\}\}$ v) $A = \{1, a, \{-1\}\}$

ii) $A = \{a, b\}$ iv) $A = \{a, b, c\}$ vi) $A = \emptyset$

11. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

12. Sean p, q proposiciones Verdaderas o Falsas. Comparar las tablas de verdad de

$$p \Rightarrow q, \qquad \sim q \Rightarrow \sim p, \qquad \sim p \vee q, \qquad \sim (p \wedge \sim q)$$

(Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una demostración por contrarrecíproco, mientras que cuando se prueba en su lugar que $p \wedge \sim q$ es falso (lleva a una contradicción), se dice que es una demostración por el absurdo).

13. Decidir si son verdaderas o falsas

i) (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$
(b) $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$
(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee \ n \leq 8$
(d) $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \wedge \ n \leq 8$
(e) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n$
(f) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) En cada uno de los casos siguientes, decidir si las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Dar un contraejemplo cuando no es el caso.

(a) $\exists x, \exists y, p(x, y)$ y $\exists y, \exists x, p(x, y)$
(b) $\forall x, \forall y, p(x, y)$ y $\forall y, \forall x, p(x, y)$
(c) $\exists x, \forall y, p(x, y)$ y $\forall y, \exists x, p(x, y)$
(d) $\forall x, p(x)$ y $\nexists x, \sim p(x)$

14. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

ii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)'$

iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

15. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

iii) $A - (A \triangle B) = A \cap B$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

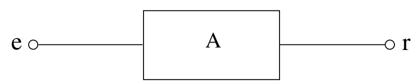
v) $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A'$

vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

vii) $C \subseteq A$
$\Rightarrow (A \cup B) \cap C' = (B - C) \cup (A \triangle C)$

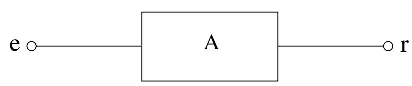
viii) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

16. Un emisor e envía señales de diferentes frecuencias a un receptor r a través de un cable conductor. Se dipone de filtros que dejan pasar a unas señales sí y a otras no, dependiendo de sus frecuencias.

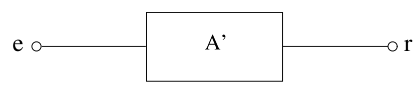


filtro

Cada uno de estos filtros tiene una llave que al accionarla invierte el espectro de frecuencias que el filtro deja pasar.

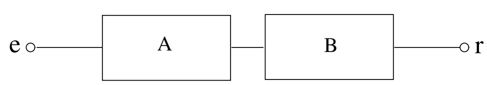


filtro

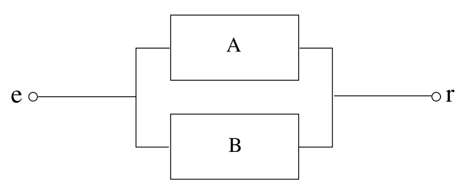


filtro invertido

Los filtros pueden conectarse en serie o en paralelo para formar nuevos filtros.



conexión serie



conexión paralela

Se considera ahora en el conjunto de todas las frecuencias y se identifica a cada filtro con el subconjunto formado por aquellas fecuencias que éste deja pasar. Observar que con la identificación recién establecida, se tienen las siguientes correspondencias:

Filtro invertido $\leftrightarrow$ Complemento , Conexión serie $\leftrightarrow$ Intersección , Conexión paralela $\leftrightarrow$ Unión

i) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B y C

(a) $(A \cup B)'$

(b) $(A \cap B)'$

(c) $A \cup (B \cap C)$

(d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

(e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f) $A \triangle B$

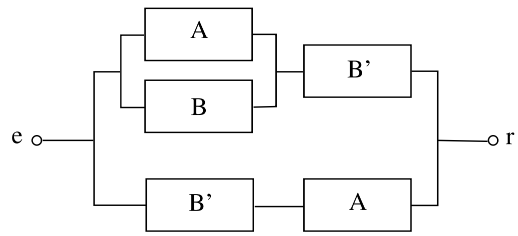
ii) Diseñar circuitos para la construcción de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B, C, D

(a) $\big(D \triangle (A \cap B)\big) - C$

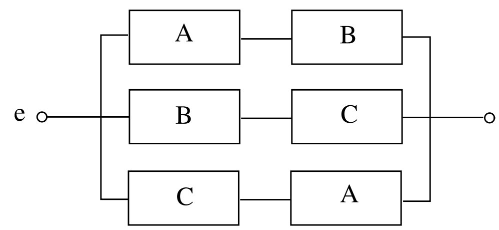
(b) $\big((D \cap A) \triangle (D \cap B')\big) \cup \big(A \cap B' \cap (C - D)\big)$

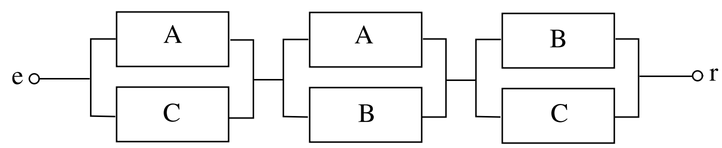
(c) $(A' \cap B \cap C) \triangle (D' \cap C)$

iii) Rediseñar el siguiente circuito construyendo otro equivalente pero que utilice únicamente dos filtros. ¿A qué conjunto corresponde el filtro resultante?



iv) ¿Son los siguientes circuitos equivalentes? En caso afirmativo escribir la identidad de conjuntos que resulta y demostrarla.





17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

18. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

<u>*Relaciones*</u>

19. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$

iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 3), (3, 5)\}$

iv) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 7)\}$

v) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$

vi) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$

vii) $\mathcal{R} = \emptyset$

viii) $\mathcal{R} = A \times B$

20. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

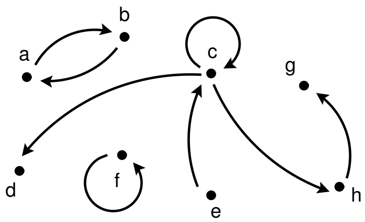
ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

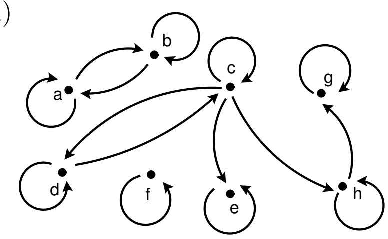
iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

21. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

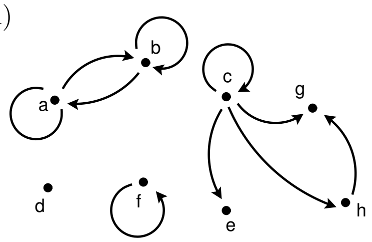
i)



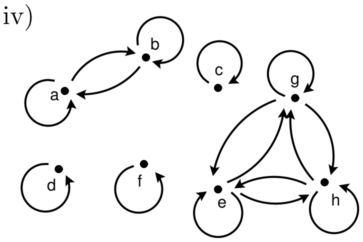
ii)



iii)



iv)

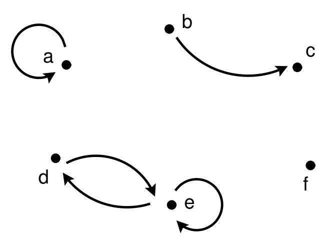


22. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior.

23. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva,
ii) simétrica,
iii) transitiva,
iv) reflexiva y simétrica,
v) simétrica y transitiva,
vi) reflexiva y transitiva
vii) de equivalencia.

24. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\}$
v) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$
vi) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \iff b$ es múltiplo de a
vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

25. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas
ii) de equivalencia y de orden

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

26. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

27. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\big\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\big\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

28. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, sea la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares). ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

29. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, sea la siguente relación: dos números están relacionados si terminan en el mismo dígito. Verificar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

30. En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, sea la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

Funciones

31. Determinar qué relaciones del ejercicio 19 son funciones de A en B, y qué relaciones del ejercicio 24 son funciones de A en A.

32. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
iv) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, e)\}$
v) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,/\, a = 2b - 3\}$
vi) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$
vii) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b \text{ es divisible por } 5\}$

33. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$
ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^3 - 5$
iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$
iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (2x, x^2, x - 7)$
v) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
vi) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
vii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$
viii) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

34. i) Dadas las funciones

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=\begin{cases}\frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6\\ 3n+1 & \text{en los otros casos}\end{cases} \quad \text{y} \quad g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g(n,m)=n(m+1),$$

calcular $(f\circ g)(3,4)$, $(f\circ g)(2,5)$ y $(f\circ g)(3,2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\le 7\\ 2x-1 & \text{si } x>7\end{cases} \quad \text{y} \quad g:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ g(n)=\sqrt{n},$$

hallar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $(f\circ g)(n)=13$ y tales que $(f\circ g)(n)=15$.

35. Hallar $f\circ g$ en los casos

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-18$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+3$

ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x^2-18$

iii) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=\begin{cases}n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4\\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4\end{cases}$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g(n)=4n$

iv) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x)=(x+5,3x)$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ g(n)=\sqrt{n}$

36. Hallar dos funciones $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ y $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tales que $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g\circ f\neq\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto $\mathbb{N}$.

37. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f:B\longrightarrow C$ y $g:A\longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f\circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f\circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva

iii) si f y g son inyectivas entonces $f\circ g$ es inyectiva

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f\circ g$ es sobreyectiva

v) si f y g son biyectivas entonces $f\circ g$ es biyectiva

38. Sea B el conjunto de todos los *bytes*, es decir de todas las expresiones de la forma

$$b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0,$$

donde $b_i=0$ o 1, $0\le i\le 7$, es lo que se llama un *bit*. Por ejemplo 10100110 y 00000001 son bytes.

Se consideran las siguientes funciones de B en B:

i) R (por *right*): desplaza cada bit un lugar hacia la derecha, pone un 0 en el bit 7 y descarta el bit 0. Por ejemplo $R(10100110)=01010011$ y $R(00000001)=00000000$.

ii) L (por *left*): desplaza cada bit un lugar hacia la izquierda, pone un 0 en el bit 0 y descarta el bit 7. Por ejemplo $L(10100110)=01001100$ y $L(00000001)=00000010$.

iii) A_b (por *and*) efectúa un 'y' lógico ($\wedge$) bit a bit con un byte $b\in B$ dado ($0\wedge 0=0$, $0\wedge 1=0$, $1\wedge 0=0$, $1\wedge 1=1$). Por ejemplo si $b=11110001$, $A_b(10100110)=10100000$ y $A_b(00000001)=00000001$.

iv) O_b (por *or* efectúa un 'o lógico'($\vee$) bit a bit con un byte $b\in B$ dado ($0\vee 0=0$, $0\vee 1=1$, $1\vee 0=1$, $1\vee 1=1$). Por ejemplo si $b=11110001$, $O_b(10100110)=11110111$ y $O_b(00000001)=11110001$.

v) X_b (por *xor*) efectúa un 'o lógico exclusivo' ($\veebar$) bit a bit con un byte $b\in B$ dado ($0\veebar 0=0$, $0\veebar 1=1$, $1\veebar 0=1$, $1\veebar 1=0$). Por ejemplo si $b=11110001$, $X_b(10100110)=01010111$ y $X_b(00000001)=11110000$.

Calcular $R\circ L$, $L\circ R$, y dado $b\in B$, $A_b\circ A_b$, $A_b\circ O_b$, $O_b\circ A_b$, $X_b\circ X_b$. Una sola de estas funciones es biyectiva: descubrir cuál y encontrar su inversa.

<u>*Combinatoria de conjuntos, relaciones y funciones.*</u>

39. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

40. ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) que **no** contengan el dígito 7 hay?

41. ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) que contengan el dígito 5 hay?

42. María tiene una colección de n libros distintos que quiere guardar en 3 cajas: una roja, una amarilla y una azul. ¿De cuántas maneras distintas puede distribuir los libros en las cajas?

43. Si A es un conjunto con n elementos, ¿cuál es el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A)$?

44. Un estudiante de intercambio debe cursar *al menos* 2 de las 6 materias que se dictan en ese cuatrimestre. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué materias cursar?

45. 7 actores deben ordenarse en una fila para realizar el saludo al final de la obra. ¿De cuántas maneras distintas lo pueden hacer? Si el actor X debe ir sí o sí en el centro de la fila, ¿de cuántas maneras distintas pueden ordenarse los demás?

46. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7?

47. Ana tiene 7 libros y quiere elegir 5 para llevárselos a un viaje. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué libros llevar? Notar la diferencia entre este ejercicio y el anterior.

48. Sea A un conjunto de n elementos, con $n \geq 3$. ¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene A? ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos?

49. Sea A un conjunto de n elementos y sea $0 \leq k \leq n$ un entero. Mostrar que la cantidad de subconjuntos de A que tienen k elementos es igual a la cantidad de subconjuntos de A que tienen $n-k$ elementos.

50. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿Cuántas relaciones de A en B hay? ¿Y de B en A?

51. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

52. Sea $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ en la forma

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cap \{1,2,3\} = B \cap \{1,2,3\}.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describir por comprensión la clase $\overline{A}$ de $\mathrm{A} = \{1,3,5\}$.

ii) ¿Cuántos elementos tiene la clase $\overline{A}$ de $A = \{1,3,5\}$?

53. Sea $X = \{1,2,\ldots,20\}$. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A - B = \emptyset$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

ii) ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ cumplen que $\{1,2,3,4,5,6\}\,\mathcal{R}\,B$?

54. Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

i) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{F}$?

ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \notin \mathrm{Im}(f)\}$?

iii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \mathrm{Im}(f)\}$?

iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2,4,6\}\}$?

55. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{8,9,10,11,12,13,14\}$.

i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay tales que $f(\{1,2,3\}) = \{12,13,14\}$?

56. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par?

iii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?

57. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ tales que f$(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$ hay?

58. Sea $A = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ tal que f es una función inyectiva$\}$.

Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$.
¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?